

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

- a) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\|_2 = 1$, also $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_a(x) := (x|a)a$.
- Begründen Sie, dass die Abbildung $P_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear ist.
 - Geben Sie die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 an.
- b) Die lineare Abbildung $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad \phi(e_2 + e_3) = e_1, \quad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 2

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A + B)C, \quad A^*C, \quad C^T B.$$

Aufgabe 3

Im $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass A und B regulär sind. Ist C regulär? Bestimmen Sie A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$ sowie $((AB)^T)^{-1}$.

- b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(AB)x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x) \cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$