Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\|_2^2 = (a|a) = 1$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_a(x) := (x|a)\,a$.

i) Die Abbildung $P_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist linear, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit den Eigenschaften des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^3$

$$P_a(\alpha x + y) = (\alpha x + y|a)\,a = \alpha(x|a)\,a + (y|a)\,a = \alpha P_a(x) + P_a(y)\,.$$

ii) Um die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ anzugeben, berechnen wir das Bild $P_a(e_j)$ des Basisvektors e_j (für $j \in \{1, 2, 3\}$) und stellen dieses als Linearkombination von e_1, e_2 und e_3 (den Basisvektoren im Zielraum) dar. Wegen $a = (a_1, a_2, a_3) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ergibt sich für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$

$$P_a(e_j) = (e_j|a)\,a = a_1a = (a_ja_1)e_1 + (a_ja_2)e_2 + (a_ja_3)e_3\,.$$

Damit lautet die j-te Spalte der gesuchten Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} a_ja_1 \\ a_ja_2 \\ a_ja_3 \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.

Also ist die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2a_1 & a_3a_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_3a_2 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir können alternative Basen des $\mathbb{R}^3$ "vorne" und "hinten" wählen (jedoch war die Aufgabenstellung eine andere!). Sei etwa a das erste Basiselement und $x, y \in \mathbb{R}^3$ so, dass a, x, y eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Diese Basis wählen wir sowohl "vorne" als auch "hinten". Da a, x, y orthonormal sind, gilt dann $P_a(a) = a = 1a + 0x + 0y$ sowie $P_a(x) = P_a(y) = 0 = 0a + 0x + 0y$. Bezüglich dieser Basis hat die Darstellungsmatrix von P_a die besonders einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_2 + e_3) = (e_2 - e_3) - e_1 = (-1)e_1 + 1e_2 + (-1)e_3\,, \\ \phi(e_2) &= \phi(e_2 + e_3) - \phi(e_3) = e_1 - (2e_1 + 3e_2 + 5e_3) = (-1)e_1 + (-3)e_2 + (-5)e_3\,, \\ \phi(e_3) &= 2e_1 + 3e_2 + 5e_3\,. \end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn nicht vorgegeben ist, bezüglich welcher Basen man die Darstellungsmatrix angeben soll, so kann man die Aufgabe sehr einfach lösen, indem man die Basen besonders geschickt wählt: Nimmt man "vorne" etwa die Basis $e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$ und "hinten" die Basis $2e_1 + 3e_2 + 5e_3, e_1, e_2 - e_3$ (Man sieht leicht, dass es sich dabei tatsächlich um Basen des $\mathbb{R}^3$ handelt), dann bildet ϕ den j-ten Basisvektor der "vorderen" Basis auf den j-ten Basisvektor der "hinteren" Basis ab, weshalb die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3 ist. Beachte: ϕ ist nicht die Identitätsabbildung!

Aufgabe 2

Die Summe $A + C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

$$A^*C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

$$C^T B = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass C nicht regulär ist.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 42 & 5 & 12 & -38 \\ 49 & 5 & 15 & -45 \\ 10 & 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenregeln für transponierte Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = I_n^T = I_n \qquad \text{und} \qquad D^T(D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = I_n^T = I_n\,.$$

b) Da A und AB regulär sind, bekommen wir die eindeutig bestimmten Lösungen

$$x = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad x = (AB)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos(1/x) = 1\cdot 0 = 0\,.$$

b) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x\to\infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1+\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x\cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n+\frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x)\neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Aufgabe 5

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} x\,\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0\,.$$

In $(*)$ verwendeten wir die Regel von de l'Hospital ($-\frac{1}{x^2} \neq 0$ für alle $x > 0$.). Hiermit folgt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln(x)} = e^0 = 1\,.$$

b) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$