

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \arcsin'(x) \, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

- b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x \, dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} \, du \Big|_{u=e^x} = \arctan(u) \Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x).$$

- c) Wir substituieren $u = 1 - x$. Dies liefert $du = (-1) \, dx$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx &= \int \frac{1-u}{\sqrt{u}} (-1) \, du \Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2}) \, du \Big|_{u=1-x} = \frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \Big|_{u=1-x} \\ &= \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3 \, dx = \frac{1}{8}(1+2x)^4 \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10.$$

- b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1| \, dx &= \int_{-2}^1 |x-1| \, dx + \int_1^2 |x-1| \, dx = \int_{-2}^1 (1-x) \, dx + \int_1^2 (x-1) \, dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \Big|_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-2 - 2) + (2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 5.\end{aligned}$$

- c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ ist $\frac{1}{2} \sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

- d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} \, dx &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} \Big|_{x=0}^1 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{9}) = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5}).\end{aligned}$$

- e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also \sqrt{t} durch x und $g'(t) dt = (2\sqrt{t})^{-1} dt$ durch dx . Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = g(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = g(4) = 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x} dx = 2 \ln|1+x| \Big|_{x=1}^2 = 2(\ln(3) - \ln(2)) = 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

- f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 x^{-1} dx = \frac{1}{2}(e^2 \ln e - \ln 1) - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}x^2\right) \Big|_{x=1}^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

- g) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = (-(-1) + 1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0 . Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x dx \right| = 2.$$

- h) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin x)^2 dx &= \sin x \cdot (-\cos x) \Big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \cos x \cdot (-\cos x) dx = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (1 - (\sin x)^2) dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2 dx \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2 \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \pi, \quad \text{also} \quad \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\pi.$$

- i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t dt$ und aus $x : 1 \rightarrow 4$ ergibt sich $t : 1 \rightarrow 2$

$$\int_1^4 \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}) \cdot 2t dt;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u du$, $t : 1 \rightarrow 2$ wird zu $u : 0 \rightarrow 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2 + 1) \cdot 2u du = \int_0^1 (4u^3 + 4u) \arctan(u) du.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned} &= (u^4 + 2u^2) \arctan(u) \Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 (u^4 + 2u^2) \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 3 \arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2 + 1)^2 - 1}{1+u^2} du = \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2 + 1) du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3}u^3 + u\right) \Big|_{u=0}^1 + \arctan(u) \Big|_{u=0}^1 = \frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\pi = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$