Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2016/2017
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R}\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

c) Aus der Ungleichung $1 + t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 2

a) **i)** Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln|x|\,dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta}\ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx = \int_{\varepsilon}^{1}\ln x\,dx = \big[x\ln x - x\big]_{\varepsilon}^{1} = (0-1)-(\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon) = -1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} -1\,.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$.
Sei nun $\eta \in (0,1)$. Mit der Substitution $y=-x$, $dy=(-1)\,dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta}\ln|x|\,dx = \int_{-1}^{-\eta}\ln(-x)\,dx = \int_{1}^{\eta}\ln(y)\,(-1)\,dy = \int_{\eta}^{1}\ln y\,dy \xrightarrow{\eta\to 0+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{0}\ln|x|\,dx$ konvergent.
Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^{1}\ln|x|\,dx = \lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta}\ln|x|\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx = -1-1=-2\,.$$

ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1}\frac{1}{x}\,dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty\,.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx$ divergiert.

b) **i)** Wie in **a) i)** gesehen, sind $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx\big)$ $= -1-1=-2$.

ii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\ln|x|\big]_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon = 0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right) = 0\,.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchychen Hauptwert.

Aufgabe 3

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens: In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1,\dots,u_n\in V$ so konstruieren, dass $\operatorname{lin}\{u_1,\dots,u_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_n$ mit der Eigenschaft $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1\}=\operatorname{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1:=x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j\in\{1,\dots,n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_j$ mit $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1}:=x_{j+1}+\sum_{k=1}^{j}\lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k\in\mathbb{K}$, so ist die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_{j+1}\}=\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i\in\{1,\dots,j\}$ ist, muss

$$0\stackrel{!}{=}\langle v_{j+1},v_i\rangle=\langle x_{j+1},v_i\rangle+\sum_{k=1}^{j}\lambda_k\langle v_k,v_i\rangle=\langle x_{j+1},v_i\rangle+\lambda_i\langle v_i,v_i\rangle$$

für alle $i\in\{1,\dots,j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i:=-\frac{\langle x_{j+1},v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}=-\frac{\langle x_{j+1},v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\,.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1:=x_1\,,\qquad v_{j+1}:=x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j}\frac{\langle x_{j+1},v_k\rangle}{\|v_k\|^2}\,v_k\quad(j=1,\dots,n-1)\,.$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1\neq0$ und $x_{j+1}\notin\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}=\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}$ für $j=1,\dots,n-1$, und damit folgt $v_j\neq0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j:=v_j/\|v_j\|$ $(j=1,\dots,n)$, so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1,x_2,x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2i&0\\5&3i&1\end{pmatrix}\xrightarrow[Z_3\to Z_3-5Z_1]{Z_2\to Z_2-2Z_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2i&-2\\0&3i&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{Z_3\to Z_3-\frac32 Z_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2i&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1:=x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad u_1:=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2,v_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=2\cdot\overline{1}+2i\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}=2$$

erhalten wir

$$v_2:=x_2-\frac{\langle x_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\,v_1=\begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix}-\frac22\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix},\qquad u_2:=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6\,,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10\,.$$

Damit ergibt sich dann

$$v_3 := x_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.