

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

$A$  : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“

$B$  : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung  $\wedge$  (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,  
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

- b) Betrachten wir die drei Aussagen

$A$  : „Im Kino läuft Herr der Ringe“,

$B$  : „Im Kino läuft James Bond“,

$C$  : „Ich gehe ins Kino“,

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“:  $(A \vee B) \Rightarrow C$ . Wegen  $(E \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg E \vee C)$  ist

$$\neg(\underbrace{(A \vee B)}_{=E} \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\underbrace{\neg(A \vee B)}_{=E} \vee C) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg C).$$

In Worten: „Im Kino lief ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich bin (dennoch) nicht ins Kino gegangen“.

- c) Es sei  $A$  die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und  $B$  die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir  $A \Rightarrow B$  verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A) \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

- d) Wir wollen  $\exists x$  mit  $A(x): B(x)$  negieren, wobei die Aussageformen  $A(x)$  und  $B(x)$  durch

$A(x)$  : „ $x$  ist ein Mensch.“

$B(x)$  : „Mathematik macht  $x$  keinen Spaß.“

gegeben sind. Wegen  $\neg(\exists x \text{ mit } A(x): B(x)) \Leftrightarrow (\forall x \text{ mit } A(x): \neg B(x))$  ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

## Aufgabe 2

Offenbar gilt: Wenn wir wissen, dass Peter kein Kind hat, wissen wir insbesondere, dass er keine Tochter hat. Also ist die Aussage  $K \Rightarrow T$  stets wahr.

Betrachten wir nun  $T \Rightarrow K$ . Nach Definition von  $\Rightarrow$  ist diese Aussage wahr, falls  $T$  falsch oder  $K$  wahr ist. Falschheit von  $T$  bedeutet „Peter hat eine Tochter“. Die Aussage  $T \Rightarrow K$  ist also wahr, falls Peter eine Tochter oder aber gar keine Kinder hat; sonst ist sie falsch.

## Aufgabe 3

- a) Die Menge aller derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsesemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\{x : x \in S_1 \wedge x \in P\} = S_1 \cap P.$$

- b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsesemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\{x : (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\} = \{x : x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

- c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\{x : x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \dots\} = \{x : \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

## Aufgabe 4

Gegeben seien eine Menge  $M$  sowie Teilmengen  $M_1, M_2, M_3$  von  $M$ .

- a) Um die Äquivalenz  $M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$  zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen  $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$  und  $M_1 \subset M_2 \Leftarrow M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$  nach.  
„ $\Rightarrow$ “: Es gelte  $M_1 \subset M_2$ , sei also jedes Element von  $M_1$  auch in  $M_2$  enthalten. Wir müssen nun zeigen:  $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$  (bzw. in Worten: Jedes Element von  $M$ , das nicht in  $M_2$  liegt, liegt auch nicht in  $M_1$ .)

Jedes Element der Menge  $M \setminus M_2$  ist nicht in  $M_2$  und damit erst recht nicht in  $M_1$ ; folglich liegt es in  $M \setminus M_1$ . Also gilt  $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ .

„ $\Leftarrow$ “: Es gelte  $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ . Zu zeigen ist  $M_1 \subset M_2$ .

Nach der Voraussetzung  $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$  liegt jedes Element von  $M$ , das nicht in  $M_2$  liegt, auch nicht in  $M_1$ . Dann ist notwendigerweise jedes Element von  $M_1$  auch in  $M_2$ , da es ja sonst nicht in  $M_1$  liegen würde. Also ist  $M_1 \subset M_2$ .

- b) Es gelte  $M_1 \subset M_2$  und  $M_2 \subset M_3$ . Um  $M_1 \subset M_3$  zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus  $M_1$  auch in  $M_3$  liegt. Sei hierzu  $x \in M_1$  beliebig. Wegen  $M_1 \subset M_2$  liegt  $x$  auch in  $M_2$  und aufgrund von  $M_2 \subset M_3$  ist  $x$  auch in  $M_3$  enthalten.

Da  $x \in M_1$  beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus  $M_1$  ebenfalls in  $M_3$  liegt, d.h.  $M_1 \subset M_3$ .

- c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  i)“.

„i)  $\Rightarrow$  ii)“: Es gelte  $M_1 \subset M_2$ . Um nun die Gleichheit der beiden Mengen  $M_1 \cap M_2$  und  $M_1$  zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion  $M_1 \subset M_1 \cap M_2$  einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu  $x \in M_1$ . Wegen  $M_1 \subset M_2$  ist auch  $x \in M_2$ . Dann ist aber  $x$  sowohl in  $M_1$  als auch in  $M_2$ , also in  $M_1 \cap M_2$ .

„ii)  $\Rightarrow$  iii)“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung  $M_1 \cap M_2 = M_1$  nur die Inklusion  $M_1 \cup M_2 \subset M_2$  nachweisen. Sei also  $x \in M_1 \cup M_2$ . Ist  $x \in M_2$ , so ist nichts zu zeigen. Ist  $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$ , so ist  $x \in M_2$ , was zu zeigen war.

„iii)  $\Rightarrow$  i)“: Sei hierzu  $x \in M_1$ . Dann ist jedenfalls  $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$ .

## Aufgabe 5

- a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch  $f_1 : M_1 \rightarrow M_2, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$ . Nicht injektiv ist z.B.  $f_2 : M_1 \rightarrow M_2, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$ . Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von  $M_1$  nach  $M_2$  gibt es nicht, weil  $M_2$  mehr Elemente als  $M_1$  enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung  $M_2 \rightarrow M_1$ . Ist etwa  $g_1 : M_2 \rightarrow M_1, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$  und  $9 \mapsto 7$ , so ist  $g_1$  nicht surjektiv. Definiert man z.B.  $g_2 : M_2 \rightarrow M_1, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 4$  und  $9 \mapsto 7$ , dann ist  $g_2$  surjektiv.

- b) i) Die Funktionen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv. Um die Bijektivität von  $h := g \circ f$  zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass  $h$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Zuerst zeigen wir, dass  $h$  injektiv ist, dass also für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt:

$$\text{Aus } x_1 \neq x_2 \text{ folgt } h(x_1) \neq h(x_2).$$

Seien  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  beliebig. Zu zeigen ist  $h(x_1) \neq h(x_2)$ .

Wegen der Injektivität von  $f$  gilt dann  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Wegen der Injektivität von  $g$  folgt daraus aber  $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ , und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade  $h(x_1) \neq h(x_2)$ .

Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von  $h$  zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von  $f$  und  $g$ . Zu zeigen ist  $h(X) = Z$ , also:

$$\text{Zu jedem } z \in Z \text{ existiert ein } x \in X \text{ mit } h(x) = z.$$

Sei dazu  $z \in Z$  beliebig. Wir suchen nun ein  $x \in X$  mit  $h(x) = z$ .

Da  $g$  surjektiv ist, existiert zu  $z$  ein  $y \in Y$  mit  $g(y) = z$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es zu diesem  $y \in Y$  ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ . Es folgt:

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

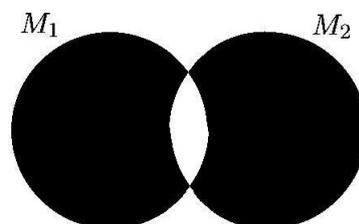
- ii) Es seien  $h = g \circ f$  surjektiv und  $g$  injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann  $f$  surjektiv ist. Sei dazu  $y \in Y$  beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  gibt. Wir betrachten  $g(y) \in Z$ . Da  $h : X \rightarrow Z$  surjektiv ist, existiert zu  $g(y) \in Z$  ein  $x \in X$  mit

$$g(y) = h(x) = g(f(x)).$$

Wegen der Injektivität von  $g$  folgt hieraus  $y = f(x)$  und damit die Surjektivität von  $f$ .

## Aufgabe 6

Sind  $M_1$  und  $M_2$  Teilmengen von  $M$ , so entspricht  $M_1 \Delta M_2$  der dunkel markierten Menge im nachstehenden Diagramm:



- a) Für jedes  $M_1 \subset M$  gilt gemäß Definition von  $\Delta$

$$M_1 \Delta M_1 = (M_1 \setminus M_1) \cup (M_1 \setminus M_1) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

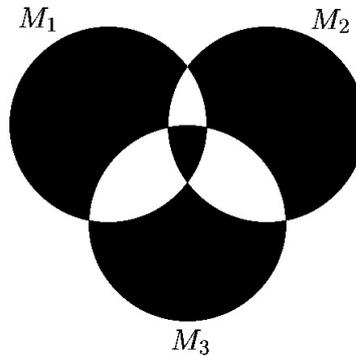
- b) Für eine beliebige Teilmenge  $M_1$  von  $M$  ist

$$M_1 \Delta \emptyset = (M_1 \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus M_1) = M_1 \cup \emptyset = M_1.$$

- c) In dieser Aufgabe sollen wir die Assoziativität der Abbildung  $\Delta : \text{Pot}(M) \times \text{Pot}(M) \rightarrow \text{Pot}(M)$ ,  $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \Delta M_2$  zeigen, also

$$M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3) = (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3 \quad \text{für alle } M_1, M_2, M_3 \in \text{Pot}(M).$$

Es seien  $M_1, M_2, M_3 \subset M$ . Wie wir uns graphisch überlegen können, entspricht sowohl  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$  als auch  $(M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$  der im nachstehenden Diagramm dunkel markierten Fläche:



Demzufolge sind die Mengen  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$  und  $(M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$  gleich; es gilt

$$\begin{aligned} M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3) &= (M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)) \cup (M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)) \cup (M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)) \cup (M_1 \cap M_2 \cap M_3) \\ &= (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3. \end{aligned}$$

Ein Element  $x \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$  gehört also genau dann zu  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3) = (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$ , wenn  $x$  nicht in genau zwei der drei Mengen  $M_1, M_2, M_3$  liegt.

Auf dieses Ergebnis können wir auch ohne graphische Überlegungen kommen, indem wir die folgenden acht Fälle unterscheiden:

*Fall 1:*  $x \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$ .

Dann ist  $x \in M_1$  und  $x \notin M_2 \Delta M_3$  und damit  $x \in M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$ .

Ferner ist  $x \in M_3$  und  $x \notin M_1 \Delta M_2$ , woraus  $x \in (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$  folgt.

*Fall 2:*  $x \in M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$ , also  $x \in M_1$  und  $x \notin M_2 \cup M_3$ .

Da  $x$  nicht in  $M_2 \cup M_3$  liegt, gehört  $x$  auch nicht zu  $M_2 \Delta M_3$ . Somit ist  $x \in M_1 \setminus (M_2 \Delta M_3) \subset M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$ .

Wegen  $x \in M_1 \setminus M_2$  ergibt sich  $x \in M_1 \Delta M_2$ . Aufgrund von  $x \notin M_3$  erhalten wir hieraus  $x \in (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$ .

*Fall 3:*  $x \in M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)$ .

Da  $x$  in  $M_2$  enthalten ist, aber weder in  $M_1$  noch in  $M_3$  liegt, folgen  $x \in M_1 \Delta M_2$  und  $x \in M_2 \Delta M_3$ . Daraus schließen wir, dass  $x \in (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$  bzw.  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$  gilt, weil  $x$  zu  $(M_1 \Delta M_2) \setminus M_3$  bzw. zu  $(M_2 \Delta M_3) \setminus M_1$  gehört.

*Fall 4:*  $x \in M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ .

Dieser Fall entspricht dem zweiten mit vertauschten Rollen für  $M_1$  und  $M_3$ .

*Fall 5:*  $x \in (M_1 \cap M_2) \setminus M_3$ , also  $x \in M_1 \cap M_2$  und  $x \notin M_3$ .

Wegen  $x \in M_1 \cap M_2$  ist  $x \notin M_1 \Delta M_2$ . Nun liegt  $x$  auch nicht in  $M_3$ , folglich erhalten wir  $x \notin (M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$ .

Wegen  $x \in M_1$  und  $x \in M_2 \Delta M_3$ , liegt  $x$  nicht in  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$ .

*Fall 6:*  $x \in (M_1 \cap M_3) \setminus M_2$ .

Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für  $M_2$  und  $M_3$ .

*Fall 7:*  $x \in (M_2 \cap M_3) \setminus M_1$ .

Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für  $M_1$  und  $M_3$ .

*Fall 8:*  $x \in M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$ .

Hier ist sofort klar, dass  $x$  weder in  $(M_1 \Delta M_2) \Delta M_3$  noch in  $M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$  liegt.