

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der maximale Definitionsbereich von $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist ebenfalls $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Polynome wie $f_3(x) = x^2 + x + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_3 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmenge $f_1(D_1)$ von f_1 setzen wir die Abbildung f_1 aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl s als auch t_{-1} bijektiv [s injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$; s surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := 1/y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $s(x) = s(1/y) = y$. t_{-1} injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$; t_{-1} surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := y + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $t_{-1}(x) = t_{-1}(y + 1) = (y + 1) - 1 = y$.] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv. ($s \circ t_{-1}$ ist erlaubt, weil $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und s hierauf definiert ist!) Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x - 1) = \frac{1}{x - 1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \quad \text{für } x \neq 1. \quad (1)$$

Wegen

$$\begin{aligned} y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : y = f_2(x) \stackrel{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

gilt $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bei $f_3(x) = x^2 + x + 1$ ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = [0, \infty)$. Für die Bildmenge von f_3 erhalten wir

$$f_3(D_3) = \left\{y \in \mathbb{R} : y \geq \frac{3}{4}\right\} = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

- b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass f_1 injektiv ist. Alternativ: f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \Leftrightarrow x - 1 \neq y - 1 \stackrel{x, y \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow f_1(x) \neq f_1(y).$$

Die Abbildung f_2 ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von f_1 und (1), denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$x \neq y \Leftrightarrow f_1(x) \neq f_1(y) \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \Leftrightarrow f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$ ist f_3 nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge Y echt größer als die Bildmenge $f(X)$ ist. Wir betrachten daher die Abbildung $f : X \rightarrow f(X)$ (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also $f_i : D_i \rightarrow f_i(D_i)$.

Die Umkehrabbildung von $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen t_{-1} und t_1 einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x - 1) = (x - 1) + 1 = x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist wegen $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu sich selbst invers, d.h. $s^{-1} = s$. Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \rightarrow D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}.$$

Zur Bestimmung von $(f_2)^{-1}$ lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = y &\Leftrightarrow x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow x(1-y) = -y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist f_2 ihre eigene Umkehrabbildung: $(f_2)^{-1} = f_2$.

- c) Erlaubt sind genau die Kompositionen $f_i \circ f_j$ mit $f_j(D_j) \subset D_i$. Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen $2 \in f(D_3)$ und $f_1(2) = 1$, aber $1 \notin D_2$ ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ nicht erlaubt.

- d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\begin{aligned}|x - 4| = |x + 1| &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 10x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

b) $|2x| > |5 - 2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned}|2x| > |5 - 2x| &\Leftrightarrow \left| \frac{5 - 2x}{2x} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \underbrace{\frac{5 - 2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}|2 - |2 - x|| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2 - |2 - x| \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -|2 - x| \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |2 - x| \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2 - x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } 3 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [3, 5].\end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x + 1| = -(x + 1)$ und $|x - 1| = -(x - 1)$ ergibt sich

$$|x + 1| + |x - 1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow -2x > 2 \Leftrightarrow x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x + 1| = x + 1$ und $|x - 1| = -(x - 1)$, also

$$|x + 1| + |x - 1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x + 1| = x + 1$ und $|x - 1| = x - 1$ folgt

$$|x + 1| + |x - 1| = 2x$$

und damit

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \text{ oder } x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1-x) \Leftrightarrow 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < -4x \underbrace{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]}_{\geq \frac{1}{2} > 0} \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x \Leftrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

2. Fall: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1+x) \Leftrightarrow 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < 4x\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < 4x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] \\ &\Leftrightarrow 4x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } x + \frac{1}{2} < -1\right) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < -\frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \geq 1-x \Leftrightarrow 2x - 2x^2 + 1 \geq 1-x \\ &\Leftrightarrow 3x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(3-2x) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \leq 3/2$, also $0 \leq x \leq 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leq x < 1$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \geq 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geq$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \leq 1-x \Leftrightarrow x(3-2x) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \geq 3/2$, also $x \geq 3/2$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \leq 3/2$, also $x \leq 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leq x < 1$ oder $x \geq 3/2$.

Aufgabe 3

- a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leq 1 + |x + y| \leq 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1 + |x + y|} \geq \frac{1}{1 + |x| + |y|} \Leftrightarrow -\frac{1}{1 + |x + y|} \leq -\frac{1}{1 + |x| + |y|} \quad (2)$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x + y|} \stackrel{(2)}{\leq} 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\geq |x| \geq 0 \\ \Rightarrow 1 + |x| + |y| &\geq 1 + |x| \geq 1 > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{1}{1 + |x|} \\ \stackrel{|x| \geq 0}{\Rightarrow} \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{|x|}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

- b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geq 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geq y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

- a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

- b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen ≤ 0 ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leq (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leq -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

- c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C , so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C .

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

- d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1+x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 5

Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist. Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$. Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A + B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M , wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf(A + B) &= -\sup(-(A + B)) = -\sup((-A) + (-B)) = -(\sup(-A) + \sup(-B)) \\ &= -(-\inf A + (-\inf B)) = \inf A + \inf B. \end{aligned}$$