Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W.Reichel
Dr. S.Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

b) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= \bigg(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\bigg) \cdot \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Big(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.\end{aligned}$$

c) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. IA. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung. IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $x^n \leqslant y^n$. Dann gilt $x^{n+1} = x^n \cdot x \leqslant y^n \cdot x \leqslant y^n \cdot y = y^{n+1}$. Wir haben bewiesen, dass $x \leqslant y \Rightarrow x^n \leqslant y^n$.
Nehmen wir nun an, dass $x^n \leqslant y^n$, aber $x > y$. Das ist unmöglich, weil $y < x$ implementiert $y^n < x^n$.