Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n \cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1-\Big(\frac{w}{z}\Big)^n \\
&\overset{|\cdot z^n (\neq 0!)}{\Leftrightarrow} \quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\, z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}w^k = z^n - w^n \\
&\Leftrightarrow \quad (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}w^k = z^n - w^n.
\end{aligned}$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\ \text{da } n-1-k \geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)}w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$(0-w)\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k}w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)^l \overset{\text{a)}}{=} \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n}{1-i/2} \cdot \frac{1+i/2}{1+i/2} \\
&= \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Big(1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{2}{5}\,i\Big(1+i/2\Big) + \frac{2}{5}\,i\Big(-(i/2)^n - (i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,i\Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\
&= \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 2

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\,\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2 - i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\overline{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\overline{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\overline{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 3

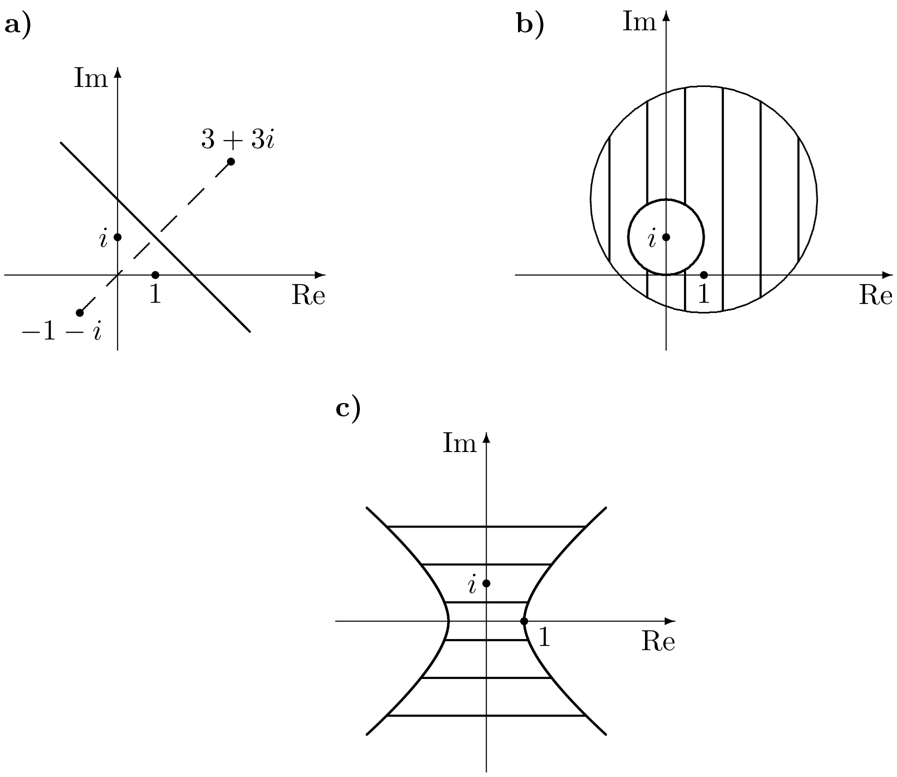
a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1 + y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.



Aufgabe 4

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0.
\end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5

Mit Hilfe von $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z}=\overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z - w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.