

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:
- i)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (-1)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
  - ii)  $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots)$
  - iii)  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = (-1)^n n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
  - iv)  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $d_n = 2018 + \frac{(-1)^n}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
  - v)  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $e_n = 0$  für gerade  $n$  und  $e_n = n$  für ungerade  $n$ .
- b) i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Die Folge  $(a_n) = (\sqrt{n})$  erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist  $(a_n)$  divergent. Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.
- ii) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt  $\varepsilon = 2\delta^2$  für  $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$ . Nach Voraussetzung existiert ein  $n_0$  so, dass für  $n \geq n_0$  stets  $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$  ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.
- iii) Etwa  $(a_n) = ((-1)^n)$  erfüllt  $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$  sogar für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(a_n)$  ist jedoch divergent.
- iv) Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$  erfüllt sicher  $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ , ist aber divergent.
- v) In diesem Fall ist  $(a_n)$  konvergent mit Grenzwert Null. Wäre  $(a_n)$  keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem  $\varepsilon$  eine Teilfolge  $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , für welche stets  $|a_{k(n)}| \geq \sqrt{\varepsilon}$  wäre. Dann wäre aber stets  $|a_{k(n)}^2| \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$  im Widerspruch zur Voraussetzung!

**Aufgabe 2**

- a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = (1 + (-1)^{2n})^{2n} = (1 + 1)^{2n} = 2^{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist  $(a_n)$  nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$ . Weiter gilt

$$a_{2n+1} = (1 + (-1)^{2n+1})^{2n+1} = (1 - 1)^{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder  $a_n$  in ihr liegen. Somit ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$ .

- b) Wegen  $1 + 1/2^n \rightarrow 1$  und  $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \rightarrow 3$  für  $n \rightarrow \infty$  ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3$ .

### Aufgabe 3

- a) Wegen  $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$  konvergiert  $(a_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 2.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ . Wie eben gesehen, gilt dann  $|a_n - 2| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Also konvergiert  $(a_n)$  gegen 2.

Ist  $\varepsilon = 10^{-10}$ , so kann man beispielsweise  $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$  nehmen. Damit gilt  $|a_n - 2| < 10^{-10}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2 \cdot 10^{10}$ .

- b) Die Folge  $(a_n)$  ist eine Nullfolge: Es gilt  $|a_n| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\varepsilon \in (0, 1)$  ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1$ , dann gilt  $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ , d.h.  $(a_n)$  konvergiert gegen 0.

Etwa für  $n_0 = 10^{40}$  ist  $|a_n - 0| < 10^{-10}$  für alle  $n \geq 10^{40}$  erfüllt.

### Aufgabe 4

- a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = 0.$$

- b) Wegen  $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und  $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) besitzt die Folge  $(a_n)$  die zwei Häufungswerte 1 und  $-1$ . Daher ist  $(a_n)$  divergent.

- c) Wegen  $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$ , also  $u-v = (u^2 - v^2)/(u+v)$  für  $u+v \neq 0$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n = \frac{9n^2 + 2n + 1 - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2 + 1/n}{\sqrt{9 + 2/n + 1/n^2} + 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- d) Der binomische Satz 4.11 (2) liefert für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei } \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen  $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$  ergibt sich  $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{41} n^{41}$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \dots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

- e) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$3 = \sqrt[3]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[3]{3^n + 3^n} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Wegen  $\sqrt[3]{2} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt mit 6.3 (4):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ .

## Aufgabe 5

- a) Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dann ist  $(a_n)$  beschränkt und  $(b_n)$  konvergent. Jedoch konvergiert die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$  nicht.

- b) Nun seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n \cdot b_n$  gegen 0 konvergiert.

Da  $(a_n)$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $K > 0$  so, dass  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Deshalb ergibt sich für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K|b_n|.$$

Wegen  $b_n \rightarrow 0$  konvergiert nach 6.3 (2)  $|b_n| \rightarrow 0$  und nach 6.3 (5) auch  $K|b_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit 6.3 (1) folgt  $c_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

## Aufgabe 6

Die Folge  $(a_n)$  sei durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. (Offenbar sind alle  $a_n \geq 0$ ; also kann man die Wurzel ziehen.)

1. Beh.: Die Folge  $(a_n)$  ist monoton wachsend, d.h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt  $a_n \geq a_{n-1}$ .

Induktionsanfang: Für  $n = 2$  gilt  $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_1$ .

Induktionsschluss: Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Für dieses  $n$  gelte  $a_n \geq a_{n-1}$  (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{\text{IV}}{\geq} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

2. Beh.: Die Folge  $(a_n)$  ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $a_n \leq 2$ .

Induktionsanfang: Es gilt  $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ .

Induktionsschluss: Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für dieses  $n$  gelte  $a_n \leq 2$  (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{\text{IV}}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert  $(a_n)$  gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ . Da die Folge  $(a_{n+1})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  ist, gilt nach Teil a):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ . Durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  in der Rekursionsformel ergibt sich für  $a$  die Gleichung

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert  $a^2 = 2 + a$  bzw.  $0 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$ , also  $a = 2$  oder  $a = -1$ . Wegen  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $a \geq 0$  (vgl. 6.3 (3)). Daher ist  $a = 2$  der Grenzwert von  $(a_n)$ .