Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := \frac{2^{2n-1}}{3^{2n+1}}$. Wegen

$$a_n = \frac{2^{2n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2^{2n}}{3^{2n}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4}{9} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{9} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ihr Wert ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{6} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right] \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1-(4/9)} - 1\right] = \frac{2}{15}.$$

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1\,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ und hat den Wert 1.

Aufgabe 2

a) Für $n \geqslant 3$ ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geqslant \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geqslant 0\,.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

b) Für $n \geqslant 3$ gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

c) Ist $a_n := \frac{(n)^n}{n!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+1/n)^n.$$

Also ist $\liminf_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |(1+1/n)^n| = \mathrm{e} > 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

d) Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe absolut.

e) Wegen $i^{2(2k+1)} = (-1)$ und $i^{2(2k)} = 1$ die Reihe ist alternierend und erfüllt alle Bedingungen des Leibnitzkriteriums. Die Reihe ist konvergent, aber nach Minorantenkriterium ist nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

Aufgabe 3

Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.
Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geqslant \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 4

a) Es seien t_n die Zeitpunkte der Treffen Herr-Hund. Dann gilt $2d = t_1 v + \frac{3}{2} t_1 v \Rightarrow t_1 = \frac{4}{5}\frac{d}{v}$und $d_1 = d - \frac{4}{5}\frac{d}{v} \cdot v = \frac{1}{5} d$. Mit der vollständigen Induktion bekommt man, dass $d_n = (\frac{1}{5})^n$.

b) 1.Lösung. Es sei D die Gesamtweglänge des Hundes. Dann gilt

$$D = (d + \frac{1}{5}d) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{5})^n = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} d = 1,5d.$$

2.Lösung. Da das Hund 1,5 Mal schnelle läuft als der Herr, die Gesamtweglänge des Hundes ist $1,5d$.

c) Für die reduzierte Geschwindigkeit gilt

$$t_1 = \frac{2}{3}\frac{d}{v} + \frac{\frac{1}{3}d}{v + \frac{4}{3}v} = \frac{17}{21}\frac{d}{v}, \quad d_1 = d - \frac{17}{21}d = \frac{4}{21}d.$$

Die Länge des Weges des Hundes bis zum ersten Treffen mit dem Herr ist $d + \frac{4}{21}d = \frac{25}{21}d$. DieGesamweglänge des Hundes ist $\frac{25}{17}d$.

Aufgabe 5

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sowie $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.
Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent (Kontraposition von Satz 7.2 (4)).

Aufgabe 6

Die Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(1/\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \quad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.