Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18
20.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\, e^{\sin x}$

b) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes den Grenzwert.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\right).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x\ln x - y\ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x) \qquad \text{für } x > y > 0\,.$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die Funktion f konstant ist, und bestimmen Sie die jeweilige Konstante.

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$$

Aufgabe 4

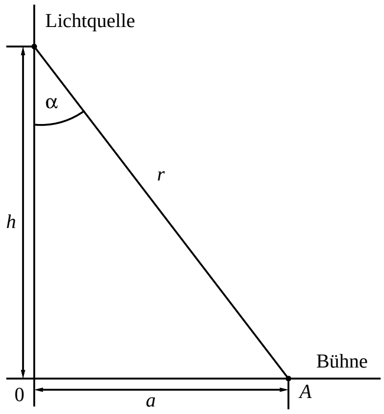
Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin^2 x)}{x\cdot(\sin 2x)}$,

b) $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 1}{(\tan x)^{\frac{1}{2}} - 1}$.

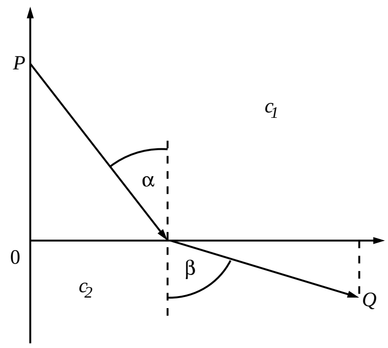
Aufgabe 5

Auf einer Bühne steht ein Beleuchtungsmast. In der Höhe h wird ein Scheinwerfer mit Lichtstärke I_0 aufgebaut. Wie muss man h wählen, damit der Punkt A optimal ausgeleuchtet ist? *Hinweis:* Nach dem Lambertschen Gesetz ist die Beleuchtungsstärke in A gegeben durch $B = I_0\cos(\alpha)/r^2$.



Aufgabe 6

(**Fermatsches Brechungsgesetz**) Ein Lichtstrahl von Punkt P zum Punkt Q schlägt den zeitkürzesten Weg ein. Dabei seien die Lichtgeschwindigkeiten oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse durch c_1 und c_2 gegeben. Leiten Sie das Brechungsgesetz her, d.h. die Beziehung zwischen α, β, c_1 und c_2 .



Aufgabe 7

Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktionen

a) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

b) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3| + 2)^2\,.$

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geqslant 0\,.$$

b) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\left|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\right| \leqslant C \left|x - \tfrac{1}{2}\right|^3.$$

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2018 !

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1a), 2a), 4a), 5, 7a), 8a)** . Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.