

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2 \sin(2x) e^{\sin x} + \cos(2x) e^{\sin x} \cos x = (\cos(2x) \cos x - 2 \sin(2x)) e^{\sin x}.$$

- b) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x) \cdot \sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.

Ist $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x)) g'(x) = E(g(x)) g'(x) = f(x) g'(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x) \sqrt[3]{x} + \ln(x) (x^{1/3})' = \frac{1}{x} \sqrt[3]{x} + \ln(x) \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x} (3 + \ln(x))}{3x}, \quad x \in (0, \infty),$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x} (3 + \ln(x))}{3x} f(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Aufgabe 2

- a) Hier betrachten wir die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \cos \sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x), \quad \text{d.h.} \quad \frac{\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin \sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$|\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}| = \left| \frac{\sin \sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \stackrel{\xi_x \in (x-1, x+1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

- b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t \ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \ln x - y \ln y = (x - y) f'(\xi) = (x - y) (1 + \ln \xi) \leq (x - y) (1 + \ln x).$$

Aufgabe 3

Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0, \infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot (-x^{-2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Da die Ableitung von f auf $(0, \infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4

a) Es gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2(3x))}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cos 3x \cdot 3}{(1 + \sin^2 3x)(\sin 2x + 2x \cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 3x}{\sin 2x + 2x} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 \cos 3x}{2 \cos 2x + 2} = \frac{18}{4} = 4 \frac{1}{2}.$$

b) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1}{\tan^{\frac{1}{2}} x - 1} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{8(\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x)}{\frac{1}{2} \tan^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{-2} x} = 0.$$

Aufgabe 5

Nach dem Lambertschen Gesetz gilt

$$B = I_0 \cos \alpha \cdot r^{-2} = I_0 \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (h^2 + a^2)^{-1} = I_0 \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir suchen Maximum der Funktion $B : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h \rightarrow I_0 \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$. Es gilt

$$B'(h) = I_0(h^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} + I_0 h(-\frac{3}{2})2h(h^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} = I_0(h^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2 - 2h^2).$$

Die Funktion B' hat nur eine Nullstelle $h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Außerdem gilt $B(0) = 0$ und $\lim_{h \rightarrow \infty} B(h) = 0$. Daraus folgt dass die Funktion $B(h)$ hat ein Maximum an der Stelle $h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aufgabe 6

Bezeichnen wir mit R den Punkt auf der x-Achse in dem der Lichtstrahl die Achse trifft. Es seien $(0, y_1)$ bzw (x_2, y_2) bzw $(x, 0)$ die Koordinaten der Punkte P bzw Q bzw R . Für die Länge des Weges von P nach R gilt $|PR| = \sqrt{(x^2 + y_1^2)}$. Ähnlich gilt $|RQ| = \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}$. Für die Zeit T , die Lichtstrahl braucht von Punkt P zum Punkt Q zu kommen, bekommen wir

$$T = \frac{|PR|}{c_1} + \frac{|RQ|}{c_2} = \frac{\sqrt{(x^2 + y_1^2)}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{c_2}.$$

Die Koordinaten y_1, x_2, y_2 und die Geschwindigkeiten c_1, c_2 sind fixiert. Die Zeit T ist nur von x abhängig. Wir suchen Minimum der Funktion $T : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \rightarrow \frac{\sqrt{(x^2 + y_1^2)}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{c_2}$. Es gilt

$$T'(x) = \frac{x}{c_1(x^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x - x_2}{c_2((x - x_2)^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos \alpha}{c_1} - \frac{\cos \beta}{c_2}.$$

Die Funktion $T(x)$ hat ein Minimum an der Stelle x genau dann, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Aufgabe 7

a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f . Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2).$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2 .

- b) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0, 3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25, \quad \text{also } g'(x) = 2x - 16.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin [0, 3]$. Also hat g' in $[0, 3]$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1, \quad \text{also } g'(x) = 2x - 8.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte 0, 3, 4, 10 untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g .

Aufgabe 8

- a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f^{(4)}(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4}, \\ f^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

sind

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f; 0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f; 0)(x) &= \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = 0 + x + \frac{1}{2!} (-1)x^2 + \frac{1}{3!} 2x^3 + \frac{1}{4!} (-6)x^4 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Sei $x \geq 0$. Um die Abschätzung $0 \leq \ln(1+x) - T_4(f; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f; 0)(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{(4+1)!} (x-0)^{4+1},$$

also mit

$$f(x) - T_4(f; 0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \leq \frac{1}{5}x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \geq 0, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5} x^5 \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+0)^5} x^5 = \frac{1}{5} x^5. \end{aligned}$$

- b) Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.$$

Daher sind

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} + \frac{2}{3}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-1/2} - \frac{4}{9}, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} + 2 \cdot \frac{8}{27} = e^{-1/2} + \frac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f; \frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f; \tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!} (x - \tfrac{1}{2})^k = f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}\right)(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''\left(\tfrac{1}{2}\right)(x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \frac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \frac{4}{9})(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \frac{16}{27})(x - \tfrac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0, 1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f; \tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!} (x - \tfrac{1}{2})^{2+1},$$

also mit

$$|f(x) - T_2(f; \tfrac{1}{2})(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} |x - \tfrac{1}{2}|^3.$$

Wegen $\xi \geq 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6} \left(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \right) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6};$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.