Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2017/18
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int x \arcsin'(x)\,dx$$
$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\Big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1-x$. Dies liefert $du = (-1)\,dx$, also

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x}$$
$$= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.$$

d) Für $x = \arctan t$ gilt $1+t^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $\frac{1+t^2}{t^2} = 1 + t^{-2} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$. Die Substitution führt zu dem Integral

$$\int \frac{(1+t^2)(1+t^2)^2}{t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int (t^{-2} + 2 + t^2)\,dt = -t^{-1} + 2t + \frac{1}{3}t^3\,,$$

wobei man sich auf eines der Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0,\infty)$ beschränken muss. Also ist

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = -\cot x + 2\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$$

auf $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, \frac{\pi}{2})$.

e) Die Substitution $x = 2\arctan t$ liefert das Integral

$$\int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$

auf $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$. Also ist

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$$

auf $(-\pi, 0)$ und $(0, \pi)$.

Aufgabe 2

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\,\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,dx &= \int_{-2}^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx = \int_{-2}^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \big(x-\tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^1 + \big(\tfrac{1}{2}x^2-x\big)\Big|_1^2 \\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big)-(-2-2)+(2-2)-\big(\tfrac{1}{2}-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^1 = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t)=\sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x=g(1)=1$ und $t=4$ entspricht $x=g(4)=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^2 = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x)=\ln x$ und $g'(x)=x$. Mit $f'(x)=x^{-1}$ und $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\big|_{x=1}^e - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e-\ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\big|_{x=1}^e = \tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x)=\sin x$ und $g'(x)=\sin x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx &= \sin x\cdot(-\cos x)\big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \cos x\cdot(-\cos x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)^2\,dx \\ &= \int_0^\pi \big(1-(\sin x)^2\big)\,dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi\,, \qquad \text{also} \qquad \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

h) Aufgabe 3b) Klausur Herbst 2016.

i) Aufgabe 3b) Klausur Herbst 2016.

j) Aufgabe 3b) Klausur Frühjahr 2015.