Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^{R} + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^{R}\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

Aufgabe 2

a) **i)** Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln|x|\,dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^1 \ln|x|\,dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx = \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \big[x\ln x - x\big]_\varepsilon^1 = (0-1) - (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} -1\,.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$.
Sei nun $\eta \in (0,1)$. Mit der Substitution $y=-x$, $dy=(-1)\,dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{-\eta} \ln(-x)\,dx = \int_{1}^{\eta} \ln(y)\,(-1)\,dy = \int_{\eta}^{1} \ln y\,dy \xrightarrow{\eta\to 0+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx$ konvergent.
Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1-1=-2\,.$$

ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty\,.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergiert.

iii) Aus der Ungleichung $1+t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t)\leqslant t$ für alle $t\geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

b) **i)** Wie in **a) i)** gesehen, sind $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{1}\ln|x|\,dx\big)$ $=-1-1=-2$.

ii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\ln|x|\big]_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon = 0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) = 0\,.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchychen Hauptwert.

Aufgabe 3

a) Um zu zeigen, dass $A := \{f \in V \mid \exists C > 0 \; \forall x \in [-1,1] : \; |f(x)| \leqslant C\}$ ein Untervektorraum von V ist, verwenden wir den Satz 14.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $f := [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0 \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|f(x)| \leqslant C$ und $|g(x)| \leqslant C'$ für alle $x \in [-1,1]$. Daher gilt für jedes $x \in [-1,1]$ $\quad |f(x)+g(x)| \leq C+C'$ und $|\alpha f(x)| \leq |\alpha||f(x)| \leq |\alpha|C$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz 14.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von V ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0\,, \qquad$ also $f + g \in B$;

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0\,, \qquad$ also $\alpha f \in B$.

c) $C := \{f \in V \mid f$ hat mind. eine Nullstelle$\}$ ist kein Untervektorraum von V, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\; x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1,1] \to \mathbb{R},\; x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in V \mid f$ ist surjektiv$\}$ ist kein Untervektorraum von V, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von V, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x+y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x+y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x+y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Nun verwende man Satz 14.4.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \operatorname{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \; \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \operatorname{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \; \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2 \,.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz 14.4.