Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2017/18
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} \alpha_1 & & + \alpha_3 a & = 0 \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & - \alpha_2 & + \alpha_3 & = 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{cases} \alpha_1 &= -a\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \\ \alpha_1 &= -2\alpha_3 \end{cases}$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 2

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir halten zunächst folgendes fest: Ist V ein beliebiger Vektorraum und gilt $U_1 \subset U_2 \subset V$, so folgt $\mathrm{lin}(U_1) \subset \mathrm{lin}(U_2) \subset V$. Außerdem haben wir $\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(U)) = \mathrm{lin}(U)$ für jede Teilmenge $U \subset V$. [Beides folgt unmittelbar aus der Definition des linearen Aufspanns.]

Also ist klar, dass die drei Vektorräume $\mathrm{lin}(v_1, v_2)$, $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Teilmengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Um zu sehen, ob $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ tatsächlich größer ist als die anderen Mengen, untersuchen wir nun, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, d. h. wir fragen uns, ob es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3| > 0$ und $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = 0$ gibt. Für solche Zahlen muss wegen der zweiten Komponente der Vektoren $\lambda_3 = -\lambda_1$ gelten. Offenbar ist $v_1 - v_3 = -2v_2$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also in der Tat linear abhängig; es gilt $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$. Folglich haben wir

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_1 + 2v_2) \subset \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(v_1, v_2)) = \mathrm{lin}(v_1, v_2)\,.$$

Völlig analog ergibt sich, dass $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Obermengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Alle vier zu betrachtenden Vektorräume sind somit identisch.

b) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ zu zeigen, reicht es zu begründen, dass wir jeden dieser Basisvektoren durch b_1, b_2, b_3 darstellen können: $e_1 = b_3 - b_2$, $e_3 = b_3 - b_1$, $e_2 = b_1 - e_1 = b_1 - (b_3 - b_2) = b_1 - b_3 + b_2$.

Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ nachzuweisen, können wir auch zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt dann $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.
Wir schreiben b_1, b_2, b_3 als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Differenz der ersten von der dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt (mit den Bezeichnungen von 14.7) $n = r = 3$ und die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe 3

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$