Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. W.Reichel
Dr S.Wugalter

WS 2017/18
07.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

b) Folgern Sie hieraus (wie aus Abschnitt 4.11(1) bekannt), dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n - w^n = (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3;

b) $1/z$;

c) $z \cdot w$;

d) $\overline{z}^2 + 1/w^2$.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1+i| = |z-3-3i| \right\}$;

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-i| \geqslant 1 \text{ und } |z-1-2i| < 3 \right\}$;

c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leqslant 1 \right\}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$;

b) $z^2 = |z|^2$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 4 und 6**. Die Aufgabe 3 wird in den Tutorien behandelt.