

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{3^{2n+1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen?
Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 4

Ein Herr spaziert eine Distanz d mit Geschwindigkeit v nach Hause. Sein Hund freut sich und rennt mit Geschwindigkeit $\frac{3}{2}v$ immer zwischen Herr und Haus hin und her.

- Bei welchen Distanzen $(d)_{n \in \mathbb{N}}$ zum Haus begegnen sich Herr und Hund?
- Bestimmen Sie mit Hilfe von $(d)_{n \in \mathbb{N}}$ die Gesamtweglänge des Hundes.
- An einem anderen Tag herrscht beim Rückweg Haus \rightarrow Herr Gegenwind, wodurch sich die Geschwindigkeit des Hundes in dieser Richtung auf $\frac{4}{3}v$ reduziert. Welche Weglänge rennt der Hund nun?

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.

Hinweis Zeigen Sie, dass gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 3 und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.