Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S.Wugalter

WS 2017/18
04.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$

b) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus.
Beispiel: $f(z) = e^z, z_0 = 1,\ e^z = e^{z-1} \cdot e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x}{x^2-x-6}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Die Ungleichung $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Probieren Sie zuerst den Fall $n = 2$.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0,2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = x_0$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}, h(x) = g(x) - x$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 5

a) Beweisen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Abschätzung $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$ indem Sie eine Beziehung zur Ungleichung $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ herstellen.

b) Zeigen Sie, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.