

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
9. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

- a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f .
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.
- c)

Aufgabe 2

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = (1 - i\sqrt{3})^{42}, \quad z_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{201}.$$

- b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.
- c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150} .

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Identitäten

- a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
- b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;
- c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

- i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$;
- ii) $x^{\log_{10} x} = 100x$.

Aufgabe 5

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche n die Funktion an der Stelle 0 stetig ist und für welche $n \in \mathbb{N}$ sie differenzierbar ist.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1**, **2a**), **3c**), **5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.