

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Es sei X eine beliebige Menge; A und B seien zwei Teilmengen von X mit charakteristischen Funktionen $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ und $\chi_B : X \rightarrow \{0, 1\}$.

- a) Zeigen Sie, dass $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ gilt.
- b) Wie lassen sich die charakteristischen Funktionen der Mengen $C_X(A)$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ und $A \cup B$ durch χ_A und χ_B ausdrücken?

Aufgabe 2 Es seien X , Y und Z Mengen sowie $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g .

- a) Zeigen Sie durch direkte Beweise:
 - (i) Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.
 - (ii) Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.
 - (iii) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.
 - (iv) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
- b) Zeigen Sie durch indirekte Beweise:
 - (i) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.
 - (ii) Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.
- c) Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweise:
 - (i) Ist g injektiv und h nicht injektiv, so ist f nicht injektiv.
 - (ii) Ist h injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.
- d) Widerlegen Sie die folgenden falschen Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.
 - (i) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.
 - (ii) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.
 - (iii) Ist h nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.
 - (iv) Ist h nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Tipp: Machen Sie sich vor einem Beweis jeweils anhand eines einfachen Beispiels klar, was die Behauptung besagt.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $2x + \frac{1}{1-x} \geq 1$ gilt.

Aufgabe 4 Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Dann ist auch $A + B := \{x \mid x = a + b \text{ für ein } a \in A \text{ und ein } b \in B\}$ eine beschränkte Menge und es gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Aufgabe 5 Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 42 \right\}$ b) $B = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 6 Es sei A eine nichtleere Menge positiver reeller Zahlen. Betrachten Sie die Menge $B := \{x \mid x = a^{-1} \text{ für ein } a \in A\}$ und zeigen Sie: Ist $\inf A > 0$, so ist B nach oben beschränkt und es gilt $\sup B = (\inf A)^{-1}$.

Aufgabe 7 Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei das Intervall $M_j := [-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j = \{0\}$$

Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{R}$, mit den Verknüpfungen:

Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$;

Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$;

sowie einer **Anordnung**, gegeben durch eine Teilmenge, den **Positivitätsbereich** $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. Für diese Daten gilt:

(K) **Körperaxiome:**

Die Menge $\mathbb{R}$ mit Addition und Multiplikation bildet einen **Körper**.

(A) **Axiome der Anordnung:**

(A.1) Es gilt genau eine der Aussagen $x \in \mathbb{R}_+, -x \in \mathbb{R}_+, x = 0$.

(A.2) $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}_+$.

(A.3) $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$.

(V) **Vollständigkeitsaxiom**

Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

Körperaxiome

Addition

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x.$$

Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodaß

$$x + 0 = x,$$

und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein

“negatives” $(-x) \in \mathbb{R}$ existiert,

mit der Eigenschaft

$$x + (-x) = 0.$$

Distributivgesetz.

Multiplikation

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \text{ **Assoziativität,**}$$

$$x \cdot y = y \cdot x. \text{ **Kommutativität.}**}$$

Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, sodaß $1 \neq 0$ und

$$1 \cdot x = x,$$

und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$,

ein “inverses” $x^{-1} \in \mathbb{R}$ existiert,

mit der Eigenschaft

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2** (ungerade römische Ziffern), **4** und **5**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.