

Lösung zum 2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a) Wir müssen nur zeigen, dass $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ für alle $x \in X$ gilt. (Dass $\chi_A \cdot \chi_B$ Abbildung von X in $\{0, 1\}$ ist, ist klar.) Sei also $x \in X$ beliebig.

Fall 1: $x \in A \cap B$. Dies bedeutet $x \in A$ und $x \in B$. Nach Definition der charakteristischen Funktionen ist dann $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ und $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \cdot 1 = 1$; damit ist in diesem Falle die Gleichheit bewiesen.

Fall 2: $x \notin A \cap B$. Dann muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten. Somit ist $\chi_A(x) = 0$ oder $\chi_B(x) = 0$, d. h. das Produkt $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ergibt auf jeden Fall 0. Dies stimmt überein mit $\chi_{A \cap B}(x) = 0$.

b) Nach Definition der charakteristischen Funktion gilt für jedes $x \in X$

$$\chi_{C_X(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in C_X(A), \\ 0, & x \in C_X(C_X(A)) = A. \end{cases} = \begin{cases} 1 - 1, & x \in A, \\ 1 - 0, & x \in C_X(A). \end{cases} = 1 - \chi_A(x).$$

Unser erstes Ergebnis lautet also: $\chi_{C_X(A)} = 1 - \chi_A$.

Mit $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap C_X(B)$ und **a)** ergibt sich $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \cdot \chi_{C_X(B)}$, also wegen des gerade Bewiesenen $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$.

Nun zu $A \triangle B$: Definitionsgemäß ist $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Die hier vereinigten Mengen können offenbar keine Elemente gemeinsam haben, d. h. ein $x \in X$ liegt genau dann in $A \triangle B$, wenn entweder $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$ gilt. Also ist für alle $x \in X$

$$\chi_{A \triangle B}(x) = \chi_{A \setminus B}(x) + \chi_{B \setminus A}(x),$$

denn wenn $x \notin A \triangle B$ gilt, dann liegt x weder in $A \setminus B$ noch in $B \setminus A$, die Summe ergibt also 0. Ist dagegen $x \in A \triangle B$, so muss x in genau einer der Mengen $A \setminus B$ bzw. $B \setminus A$ liegen. Die Summe ergibt dann 1. Wegen des schon Bewiesenen folgt

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B) + \chi_B \cdot (1 - \chi_A).$$

Da $\chi_M = \chi_M^2$ für jede charakteristische Funktion χ_M gilt, kann man dies umformen zu

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B = \chi_A^2 - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B^2 = (\chi_A - \chi_B)^2.$$

Bei einer beliebigen Vereinigung von Mengen muss man beachten, dass ein Element auch in beiden Mengen liegen kann; dann gäbe die Summe der charakteristischen Funktionen den Wert 2. Aus diesem Grunde ist

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B.$$

Aufgabe 2 a) (i) Wir müssen zeigen, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: Aus $x_1 \neq x_2$ folgt $h(x_1) \neq h(x_2)$. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Wegen der Injektivität von f ist dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.

(ii) „bijektiv“ bedeutet: „injektiv“ und „surjektiv“. Folglich sind f und g injektiv und aus **(i)** folgt, dass auch h injektiv ist. Jetzt müssen wir nur noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g . Zu zeigen ist $R(h) = Z$, also: Zu jedem $z \in Z$ existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = z$. Sei also $z \in Z$ beliebig. Da g surjektiv ist, gibt es dazu ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und es folgt: $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iii) Sei $z \in Z$ beliebig; wir müssen zeigen, dass ein $y \in Y$ existiert mit $g(y) = z$. Da nach Voraussetzung h surjektiv ist, gibt es zu z ein $x \in X$ mit $h(x) = z$. Nach Definition von h heißt das aber $g(f(x)) = z$ und damit gilt für $y := f(x)$ gerade $g(y) = z$.

(iv) Sei $y \in Y$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Wir definieren zunächst $z := g(y)$. Da h surjektiv ist, existiert zu diesem $z \in Z$ ein $x \in X$ mit $z = h(x) = g(f(x))$. Damit wissen wir $g(f(x)) = z = g(y)$ und wegen der Injektivität von g folgt $f(x) = y$.

b) Da indirekte Beweise gefordert sind, müssen wir z.B. bei **(i)** zeigen: Falls g *nicht* surjektiv ist, ist auch h *nicht* surjektiv.

(i) Ist g *nicht* surjektiv, so bedeutet dies $R(g) \neq Z$, also: Es gibt ein $z \in Z$, so dass für alle $y \in Y$ gilt: $g(y) \neq z$. Insbesondere gilt dann aber $h(x) = g(f(x)) \neq z$ für alle $x \in X$, d.h. h ist nicht surjektiv.

(ii) Ist f *nicht* injektiv, so bedeutet dies: Es gibt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt aber $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$; also ist h nicht injektiv.

c) (i) Wir nehmen an, f wäre injektiv. Da h nicht injektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $h(x_1) = h(x_2)$, d.h. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da f injektiv ist, gilt $y_1 := f(x_1) \neq f(x_2) =: y_2$. Trotzdem haben wir $g(y_1) = g(y_2)$ gezeigt, im Widerspruch zur vorausgesetzten Injektivität von g .

(ii) Angenommen, g wäre nicht injektiv. Dann gibt es also $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ und $g(y_1) = g(y_2)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Da f eine Funktion ist, folgt $x_1 \neq x_2$ aus $y_1 \neq y_2$. Wir erhalten $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = h(x_2)$. Somit ist h nicht injektiv, im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Wir betrachten stets $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ und ändern nur die Definitionsbereiche bzw. die Menge, in die abgebildet wird. Es ergibt sich $h(x) = x^2$.

(i) Für $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ injektiv, g jedoch nicht.

(ii) Für f und g wie in **(i)** ist h surjektiv, f jedoch nicht.

(iii) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht injektiv, f aber schon.

(iv) Für f und g wie in **(iii)** ist h nicht surjektiv, f aber schon.

Aufgabe 3 Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \geq 1-x &\Leftrightarrow 2x - 2x^2 + 1 \geq 1-x \\ &\Leftrightarrow 3x - 2x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x(3-2x) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \leq 3/2$, also $0 \leq x \leq 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leq x < 1$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \geq 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geq$ um und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \leq 1-x \Leftrightarrow x(3-2x) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \geq 3/2$, also $x \geq 3/2$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \leq 3/2$, also $x \leq 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leq x < 1$ oder $x \geq 3/2$.

Aufgabe 4 Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $A + B \leq \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.

Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert

wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum. Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A + B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung wissen wir, wie man bei beschränkten Mengen das Infimum als ein Supremum schreiben kann:

$$\begin{aligned}\inf(A + B) &= -\sup(-(A + B)) = -\sup((-A) + (-B)) = -(\sup(-A) + \sup(-B)) \\ &= -(-\inf A + (-\inf B)) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 a) Die Menge A ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke, so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n}$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von A . (Man kann allerdings schreiben: $\sup A = \infty$.)

Die Menge A ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (x - 1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von A sein. Also ist $\inf A = 2$ und wegen $2 \in A$ folgt auch $\min A = 2$.

b) Offenbar gilt $x^2(1 + x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in B$ (man setze $x = 0$) und damit folgt: Infimum und Minimum von B existieren, es ist $\inf B = \min B = 0$.

Die Menge B ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1 + x^2} \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 + x^2$$

und die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von B ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1 + x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2), \quad \text{also} \quad (1 - \Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1 - \Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 6 Da A nach unten beschränkt ist (durch 0), existiert $\alpha := \inf A$. Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$ und wir müssen nun zeigen, dass $\alpha^{-1} = \sup B$ gilt. Es sind also zwei Dinge zu beweisen: Zum einen, dass α^{-1} eine obere Schranke von B ist; zum anderen, dass α^{-1} sogar die *kleinste* obere Schranke ist.

Da α eine untere Schranke von A ist, gilt $\alpha \leq a$ für alle $a \in A$. Multiplikation mit $a^{-1}\alpha^{-1}$ (dies ist eine positive Zahl) liefert $a^{-1} \leq \alpha^{-1}$ für alle $a \in A$. Ist nun $x \in B$ beliebig, so gilt $x = a^{-1}$ für ein $a \in A$; es ist also $x \leq \alpha^{-1}$. Damit ist klar, dass B durch α^{-1} nach oben beschränkt ist.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist, dass also kein $\Gamma < \alpha^{-1}$ obere Schranke von B ist. Es ist klar, dass kein $\Gamma \leq 0$ obere Schranke von B sein kann, da B nur positive Zahlen enthält. Sei also $0 < \Gamma < \alpha^{-1}$ beliebig. Dann folgt $\Gamma^{-1} > \alpha = \inf A$ und da α die *größte* untere Schranke von A ist, muss es ein $a \in A$ mit $a < \Gamma^{-1}$ geben. Dies bedeutet aber wiederum $a^{-1} > \Gamma$ und wegen $a^{-1} \in B$ ist damit Γ keine obere Schranke von B .

Aufgabe 7 Offenbar gilt $\{0\} \subset M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit auch $\{0\} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$.

Ist andererseits $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$, so bedeutet dies

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad -\frac{1}{j} \leq x \leq \frac{1}{j}.$$

Angenommen, es wäre $x < 0$. Aus $-1/j \leq x$ folgt dann durch Multiplikation mit j/x (dies ist eine negative Zahl): $-1/x \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

Wäre $x > 0$, so folgte aus $x \leq 1/j$ durch Multiplikation mit j/x , dass $j \leq 1/x$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Erneut ein Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt ist.

Also muss $x = 0$ gelten und wir haben auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \subset \{0\}$ gezeigt.