UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
2.11.1999

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch $f_n(x) := x^n$ gegebene Funktion $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. Folgern Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n$$

Aufgabe 2 Die beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien monoton fallend. Was kann man dann über $g \circ f$ sagen?

Aufgabe 3 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

c) Die Zahl $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$.

Aufgabe 5 Berechnen Sie das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1\,000\,000}\right).$$

Aufgabe 6 Zeigen Sie ohne vollständige Induktion, dass für alle $k \geqslant 2$

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$$

gilt und folgern Sie daraus die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Ungleichungskette

$$2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ist $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ eine natürliche Zahl?

— bitte wenden —

Aufgabe 7 Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, also: Für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Hinweise: Beweisen Sie die gemäß Aufgabe 1 äquivalente Aussage. Gehen Sie beim Induktionsschritt folgendermaßen vor: Nehmen Sie an, dass $x_{n+1} \geqslant x_j$ für $j = 1, \ldots n$ gilt und betrachten Sie

$$\xi := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad x := \frac{x_{n+1} - \xi}{\xi(n+1)}.$$

Wenden Sie dann die Bernoullische Ungleichung auf $(1+x)^{n+1}$ an.

Aufgabe 8 Die Zahlen a_n seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := \frac{1}{4}, \qquad a_n := \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{n^2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geqslant 3.$$

Versuchen Sie eine einfache Formel für a_n zu finden und beweisen Sie diese.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1**, **4**, **6** und **7**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.