

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k.$$

Folgern Sie daraus den binomischen Satz.

Aufgabe 2 In einer Klausur haben n Studierende insgesamt k Punkte erreicht (wobei $n, k \in \mathbb{N}$; es gibt keine halben Punkte). Zeigen Sie, dass es dann

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten gibt, wie die Punkte auf die Studierenden verteilt sein können.

Aufgabe 3 Bei einem Festakt sollen sechs Reden gehalten werden. Dafür stehen vier Regierungs- und vier Oppositionspolitiker sowie zwei Bürgerrechtler zur Verfügung; jeder darf höchstens eine Rede halten.

- a) Wieviele mögliche Rednerlisten gibt es?
- b) Wieviele gibt es, wenn jemand von der Regierung die erste Rede halten soll?
- c) Wieviele gibt es, wenn mindestens ein Bürgerrechtler sprechen soll?

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$, gegeben durch

$$h(-\infty) := -1, \quad h(x) := \frac{x}{1+|x|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad h(\infty) := 1,$$

bijektiv und streng monoton wachsend ist (dabei sei $-\infty < x$ und $x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 5 Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

- a) $|2x| > |6 - 2x|$
- b) $|x - 2| \cdot |x + 2| = 2$
- c) $3x(1 + |x|)^{-1} < 4x^2$
- d) $|7 - |x - 5|| \leq 3$

Aufgabe 6 Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von

- | | |
|----------------|------------------------|
| a) z^3 | b) $1/z$ |
| c) $z \cdot w$ | d) $\bar{z}^2 + 1/w^2$ |

Aufgabe 7 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

- a) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| \text{ und } |z - i - 1| \leq 1 \}$
- b) $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \text{ und } \frac{2}{3}\pi < \arg z < \frac{4}{3}\pi \}$

Aufgabe 8 Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

- | | |
|-----------------------|------------------------------|
| a) $z^2 - 2z + 3 = 0$ | b) $\bar{z} = z^3$ |
| c) $z^5 = 1 - i$ | d) $z^3 = (6i - 10)/(4 + i)$ |

Übungsklausur Die erste Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 4. Dezember (Samstag), 8–10 Uhr statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich in der Zeit vom 22.11. bis 25.11 (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 5 und 6**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.