UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
23.11.1999

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Gegeben seien vier Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ seien linear unabhängig und sowohl $\vec{x}$ als auch $\vec{y}$ lasse sich als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen. Zeigen sie, dass sich dann sowohl $\vec{u}$ als auch $\vec{v}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ darstellen lässt.

Aufgabe 2 In $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Punkte gegeben: $A = (5,0,1)$, $B = (4,-2,1)$, $C = (2,-4,2)$, $P = (5,-5,3)$, $Q = (3,1,1)$ und $R = (9,3,1)$.

a) Welchen Abstand hat P von der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C geht?

b) Es sei $K := \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{p}\| = 5 \,\}$ die Kugel um P mit Radius 5. Der Schnitt von E und K ist ein Kreis; berechnen Sie dessen Mittelpunkt und Radius.

c) Welche Koordinaten hat der Punkt, der sich ergibt, wenn man den Punkt P an der Ebene E spiegelt?

d) Es sei g die Gerade, die durch A und B geht, h sei die Gerade, die durch Q und R geht. Zeigen Sie, dass sich g und h in einem Punkt schneiden und bestimmen Sie diesen sowie den Schnittwinkel.

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{z}$ und das Spatprodukt $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\,)$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bilden $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ ein Rechtssystem? Sind sie linear unabhängig?

Aufgabe 4 Es sei $q > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Für die Zahlenfolge (a_n) gelte

$$a_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q \qquad \text{für alle } n \geqslant N.$$

Folgern Sie, dass dann $|a_n| \leqslant q^{n-N} |a_N|$ für alle $n \geqslant N$ gilt.

Aufgabe 5 Es sei (a_n) eine nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}\big)$$

existiert und den Wert $\limsup(a_n)$ hat.

— bitte wenden —

Aufgabe 6 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen (a_n) und geben Sie $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$ **b)** $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \\ 2, & n = 3k-1 \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$

Aufgabe 7 Es sei $0 < a < 1$. Die Folge a_n wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{1}{2}a, \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a + a_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben durch 1 beschränkt. Konvergiert die Folge? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$ **b)** $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$ **d)** $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ **f)** $a_n = \dfrac{1}{n^4}\left(\sqrt[10]{1 + 3n^4 + n^9} - 1 \right)$

Übungsklausur Die erste Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 4. Dezember (Samstag), 8 – 10 Uhr statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich bis 25.11. (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2**, **4**, **5** und **7**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.