UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
26.11.1999

Lösung zum 6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Nach Voraussetzung existieren $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{y} = y_1\vec{u} + y_2\vec{v}.$$

Wir zeigen hier, dass sich $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ darstellen lässt; völlig analog kann man zeigen, dass dies auch für $\vec{v}$ gilt.

Ist $x_2 = 0$, so gilt $\vec{x} = x_1\vec{u}$. Da $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig sind, kann $\vec{x}$ nicht der Nullvektor sein. Folglich ist $x_1 \neq 0$ und somit $\vec{u} = \frac{1}{x_1}\vec{x}$ ein Darstellung von $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Ist $x_2 \neq 0$, so multiplizieren wir die obigen Darstellungen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit y_2 bzw. x_2:

$$y_2\vec{x} = x_1y_2\vec{u} + x_2y_2\vec{v} \quad \text{und} \quad x_2\vec{y} = x_2y_1\vec{u} + x_2y_2\vec{v}.$$

Dann ziehen wir diese Gleichungen voneinander ab:

$$y_2\vec{x} - x_2\vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{u}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{x}, \vec{y}$ und wegen $x_2 \neq 0$ steht hier links nicht der Nullvektor, also muss $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ gelten, und die Division durch diese Zahl liefert die gewünschte Darstellung von $\vec{u}$.

Aufgabe 2 **a)** Die Ebene E wird von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt. Um einen Normalenvektor der Ebene zu finden, bilden wir deren Kreuzprodukt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{also} \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =: \vec{n}$$

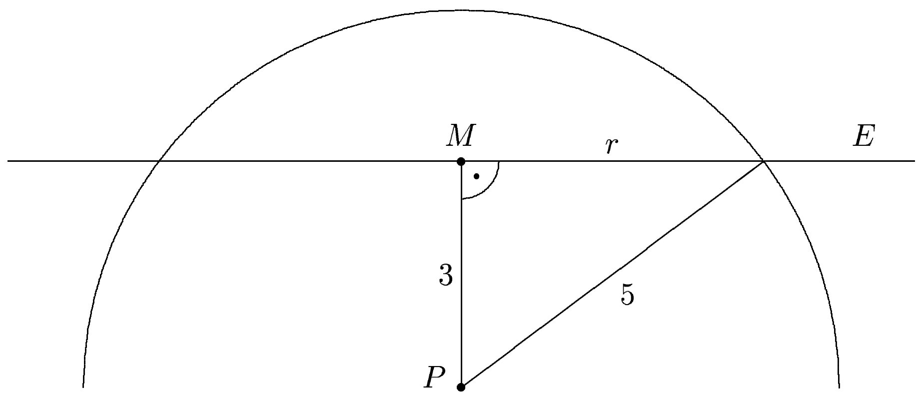
Die Ebene lässt sich damit darstellen durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$. Einsetzen von A liefert $\alpha = -12$. Wegen $\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$ erhalten wir die Hessesche Normalform

$$E \ : \ \vec{x} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.$$

Der Punkt $P = (5, -5, 3)$ hat von dieser Ebene den Abstand

$$\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \right| = \left| \tfrac{1}{3}(10 + 5 + 6) - 4 \right| = 3.$$

b) Man betrachte folgende Skizze, bei der wir von der Seite auf die Ebene schauen, so dass E nur als eine Gerade erscheint:



Nach dem Satz des Pythagoras hat der Schnittkreis den Radius $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Bezeichnet $\vec{n}_0$ den Normalenvektor aus der Hesseschen Normalform von E, so ist der Mittelpunkt M des Schnittkreises einer der beiden Punkte M_1, M_2, wobei

$$\overrightarrow{OM_{1,2}} = \overrightarrow{OP} \pm 3\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich $M_1 = (7, -6, 5)$ und $M_2 = (3, -4, 1)$. Durch Einsetzen stellt man fest, dass M_2 derjenige der beiden Punkte ist, der in der Ebene E liegt. Also: $M = (3, -4, 1)$.

c) Wegen $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - 3\vec{n}_0$ gilt für diesen Punkt P' offenbar

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 6\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) Die Gerade g hat $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor, die Gerade h hat $\overrightarrow{QR}$ als Richtungsvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen als Richtungsvektoren $\vec{u} := -\overrightarrow{AB}$ bzw. $\vec{v} := \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ und suchen nun den Schnittpunkt von

$$g \;:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad h \;:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir suchen also s und t mit

$$5+s=3+3t, \qquad 2s=1+t, \qquad 1=1$$

Wir subtrahieren das Dreifache der zweiten von der ersten Gleichung: $5-5s=0$, also $s=1$. Es folgt $t=1$ und der Schnittpunkt hat damit die Koordinaten $(6,2,1)$. Für den Winkel φ zwischen den Richtungsvektoren ergibt sich

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Schnittwinkel ist also $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. (Ergäbe sich hier ein Winkel $> \frac{1}{2}\pi$, würde man als Schnittwinkel üblicherweise $\pi - \varphi$ angeben.)

Aufgabe 3 Für das Vektorprodukt ergibt sich

$$\vec{x}\times\vec{z} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-1)-3\cdot(-2)\\3\cdot 2-1\cdot(-1)\\1\cdot(-2)-2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\-6\end{pmatrix}.$$

Definitionsgemäß gilt $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$. Statt dies auszurechnen benutzen wir

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = (\vec{z}\times\vec{x})\cdot\vec{y} = -(\vec{x}\times\vec{z})\cdot\vec{y} = -\begin{pmatrix}4\\7\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix} = -14.$$

Ein Rechtssystem ist nach Definition durch $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) > 0$ charakterisiert; somit bilden $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ *kein* Rechtssystem. Wegen $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \neq 0$ sind sie jedoch linear unabhängig.

Aufgabe 4 Wir benutzen vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für $n=N$ ist die Behauptung richtig, denn dann ist $q^{n-N}=q^0=1$.

Induktionsschluss: Für ein $n \geqslant N$ sei $|a_n| \leqslant q^{n-N}|a_N|$ bewiesen (IV). Dann folgt

$$|a_{n+1}| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|a_n| \leqslant q\cdot|a_n| \overset{\mathrm{IV}}{\leqslant} q\cdot q^{n-N}|a_N| = q^{n+1-N}|a_N|.$$

Aufgabe 5 Wir definieren die reelle Zahlenfolge (b_n) durch

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

(Da (a_n) nach oben beschränkt ist, gilt $b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.) Die Folge (b_n) ist monoton fallend, denn das Supremum wird ja von immer kleineren Mengen genommen. Sie ist somit konvergent oder aber bestimmt divergent gegen $-\infty$; in jedem Falle existiert somit $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wir müssen zeigen, dass $\limsup(a_n) = b$ gilt.

Fall 1: Ist $\limsup(a_n) = -\infty$, also $-\infty$ der einzige Häufungspunkt der Folge, so gilt $a_n \to -\infty$ für $n\to\infty$. Zu jedem $K \in \mathbb{R}$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant K$ für $n \geqslant N$. Dann ist auch $b_n \leqslant K$ für alle $n \geqslant N$ und damit gilt $b_n \to -\infty$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Ist $\limsup(a_n) > -\infty$, so haben wir $H_G := \limsup(a_n) \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen zunächst: $b \leqslant H_G$. Dazu wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nur endlich viele a_n mit $a_n > H_G + \varepsilon$. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant H_G + \varepsilon$ für $n \geqslant N$. Dies impliziert $b_n \leqslant H_G + \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ und damit auch $b \leqslant H_G + \varepsilon$. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also ist $b \leqslant H_G$.

Nun zeigen wir noch $H_G \leqslant b$. Wieder wählen wir ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Insbesondere ist also $b_n \leqslant b + \varepsilon$ für $n \geqslant N$. Nach Definition von b_n bedeutet dies aber: $a_n \leqslant b + \varepsilon$ für $n \geqslant N$. Also gilt $a_n > b + \varepsilon$ nur für endlich viele a_n. Folglich ist kein Häufungspunkt von (a_n) größer als $b + \varepsilon$, d. h. es ist $H_G \leqslant b + \varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $H_G \leqslant b$ gelten.

Aufgabe 6 **a)** Offenbar gilt

$$a_{2n} = \left(1 + (-1)^{2n}\right)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(a_n) ist also nicht nach oben beschränkt, d. h. ∞ ist ein Häufungspunkt. Weiter gilt

$$a_{2n-1} = \left(1 + (-1)^{2n-1}\right)^{2n-1} = (1-1)^{2n-1} = 0.$$

Damit ist auch 0 ein Häufungspunkt der Folge, denn in jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele Folgenglieder. Weitere Häufunspunkte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele (a_n) in ihr liegen. Somit ist $\liminf(a_n) = 0$ und $\limsup(a_n) = \infty$.

b) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungspunkte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf(a_n) = 1$ und $\limsup(a_n) = 3$.

Aufgabe 7 Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichungskette $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt die Behauptung für $a_1 = \frac{1}{2}a$.

Induktionsschluss: Es sei $0 < a_n < 1$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $a_{n+1} > 0$ (dazu brauchen wir die Induktionsvoraussetzung gar nicht). Aus $0 < a_n < 1$ folgt $a_n^2 < 1$ und damit

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) < \tfrac{1}{2}(a+1) < \tfrac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a + a_1^2) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a_1^2 \geqslant 0$.

Induktionsschluss: Es sei bereits $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ bewiesen. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_{n+1}^2) - \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

und nach Induktionsvoraussetzung und wegen $a_n > 0$ ist dies $\geqslant 0$.

Da (a_n) monoton wächst und nach oben durch 1 beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen gewissen Grenzwert $c \leqslant 1$. Diesen erhalten wir, indem wir in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ machen. Dies liefert

$$c = \tfrac{1}{2}(a + c^2), \quad \text{also} \quad c^2 - 2c + a = 0, \quad \text{d. h.} \quad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Da uns bereits $c \leqslant 1$ bekannt ist, ergibt sich $c = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aufgabe 8 **a)** Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Diese Folge ist divergent, denn sie besitzt die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz liefert

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k = \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \cdots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Aus Aufgabe 5 des 3. Übungsblatts wissen wir, dass $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ gilt. Damit folgt unmittelbar $a_n \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$.

f) Die Folge konvergiert, denn

$$a_n = \sqrt[10]{\frac{1+3n^2+n^9}{n^{40}}} - \frac{1}{n^4} = \sqrt[10]{\frac{1}{n^{40}} + \frac{3}{n^{38}} + \frac{1}{n^{31}}} - \frac{1}{n^4} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[10]{0} - 0 = 0.$$

Eigentlich hätte die Aufgabenstellung aber anders lauten sollen, nämlich:

$$a_n = n^4\Big(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1\Big).$$

Dabei gehen wir ähnlich wie in Teil **c)** vor. Wir verwenden

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1})$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so ist

$$a_n = n^4(b_n - 1) = n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1}$$

und wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.