

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Die Folgen (σ_n) und (t_n) sind gegeben durch

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \frac{1}{n \cdot n!} < \sigma_n < e - \frac{1}{(n+1)!}$
- b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \frac{3}{n} < t_n < e - \frac{1}{2n}$

Aufgabe 2 Beweisen Sie: Zu jeder reellen Zahl x existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie für $q \in (0, 1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Dies liefert eine Reihe, deren Wert Sie kennen. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 4 Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}.$$

- a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?
- d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 5 Die reelle Folge (a_n) sei monoton fallend und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie: Dann gilt

$$n \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

Aufgabe 6 Es sei $q \in (0, 1)$. Für die Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots$ gelte

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (x_n) konvergiert, und für ihren Grenzwert x gilt

$$|x - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Aufgabe 7 Es sei (a_n) eine Zahlenfolge und k eine beliebige natürliche Zahl. Wie lässt sich dann $\limsup \sqrt[n]{|a_{n+k}|}$ aus $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen?

Aufgabe 8 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \max\{n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0\}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Skizzieren Sie die Schaubilder von f_1 , f_2 und f_3 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{100}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

Hinweise zur 1. Übungsklausur:

- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 14.12. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 16.12. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 3, 5** und **7**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.