UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
10.12.1999

Lösung zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Nach Definition von e und σ_n gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right)$$
$$< \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = \frac{1}{n \cdot n!}\,;$$

damit ist die Abschätzung von σ_n nach unten gezeigt. Weiter gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}\,,$$

womit auch die Abschätzung nach oben bewiesen ist.

b) Aus Aufgabe 2 vom 7. Übungsblatt wissen wir, dass

$$t_n \leqslant e \leqslant t_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ergibt sich

$$e - t_n \leqslant t_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) - t_n = \frac{t_n}{n} \leqslant \frac{e}{n}.$$

Gemäß **a)** gilt $e < \sigma_1 + \frac{1}{1 \cdot 1!} = 3$, also folgt $e - t_n < 3/n$.
Nun noch zur Abschätzung nach oben: Mit dem binomischen Satz ergibt sich für $n \geqslant 2$

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\,.$$

Für $n \geqslant 2$ und $2 \leqslant k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$
$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \leqslant \frac{1 - \frac{1}{n}}{k!}\,.$$

(Die Voraussetzung $k \geqslant 2$ braucht man für die letzte Abschätzung.)

Damit ergibt sich nun

$$t_n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1 - \frac{1}{n}}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sigma_n - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < \sigma_n - \frac{1}{2n} < e - \frac{1}{2n}.$$

Die Ungleichung ist jetzt für $n \geqslant 2$ gezeigt. Dass sie auch für $n = 1$ gilt, sieht man leicht ein: $t_1 = 2 < e - \frac{1}{2}$, denn $e > \sigma_2 = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 2 Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge (x_n) wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < x + \frac{1}{n}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen diesen beiden reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt; es gibt also ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x < x_n < x + \frac{1}{n}$.

Diese Folge konvergiert gegen x. Dies folgt aus $x \leqslant x_n \leqslant x + \frac{1}{n}$ und $x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} x$.

Aufgabe 3 Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent, also gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n} 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n,$$

und diese Reihe (Cauchyprodukt) ist ebenfalls absolut konvergent. Folglich ergibt sich, indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 4 **a)** Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $n > \sqrt{n}$ und damit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme einer Reihe, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit

$$s_N \leqslant C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d. h. die gegebene Reihe ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades n gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades n dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades n gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geqslant \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 5 Die Reihe ist konvergent, also gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; da die Folge (a_n) zudem monoton fällt, ist $a_n \geqslant 0$ für alle n.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Reihe konvergiert, gibt es ein N_0 mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt auch $N_0 \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit existiert ein N_1 mit $|N_0 \cdot a_n| \leqslant \varepsilon/2$ für $n \geqslant N_1$. Damit ergibt sich für $N \geqslant \max\{N_0, N_1\}$

$$N \cdot a_N = N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_N \leqslant N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n \leqslant N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(Bei der ersten Abschätzung benutzen wir, dass (a_n) monoton fällt.)

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit $N \cdot a_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$ bewiesen.

Die Voraussetzung $a_n \geqslant 0$ statt der Monotonie genügt nicht: Man betrachte das Beispiel

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Reihe ist konvergent, weil $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ konvergiert. Wenn n eine Zweierpotenz ist, gilt jedoch $n \cdot a_n = 1$; die Folge $(n \cdot a_n)$ konvergiert also nicht gegen 0.

Aufgabe 6 Die Konvergenz der Folge beweisen wir mit Hilfe des Cauchykriteriums. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q \cdot |x_n - x_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant q^n \cdot |x_1 - x_0|.$$

Für $m \geqslant n$ gilt daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant q^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + q^n \cdot |x_1 - x_0| \\ &= q^n(q^{m-n-1} + \cdots + 1) \cdot |x_1 - x_0| \leqslant q^n \cdot |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Im Falle $x_0 = x_1$ ist die Folge konstant und konvergiert daher trivialerweise. Sonst können wir wegen $q^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N finden, so dass

$$q^n \leqslant \frac{(1-q)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} \quad \text{für } n \geqslant N.$$

Das bedeutet aber: Für $m \geqslant n \geqslant N$ ist $|x_m - x_n| \leqslant \varepsilon$. Die Folge (x_n) ist also nach dem Cauchykriterium konvergent.

Machen wir in der obigen Abschätzung für $|x_m - x_n|$ den Grenzübergang $m \to \infty$, so folgt die behauptete Abschätzung für $|x - x_n|$.

Aufgabe 7 Es gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_{n+k}|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, wie wir jetzt beweisen werden.

1. Fall: Ist die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so gilt dies auch für die Folge $(\sqrt[n]{|a_{n+k}|})_n$. Wäre nämlich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_{n+k}|} \leqslant C, \quad \text{also} \quad |a_{n+k}| \leqslant C^n \leqslant (1+C)^n \leqslant (1+C)^{n+k},$$

so folgte die Beschränktheit von $(\sqrt[n+k]{|a_{n+k}|})_n$ und damit auch die von $(\sqrt[n]{|a_n|})$.

2. Fall: Ist $S := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, so wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant S + \varepsilon/2 \quad \text{für fast alle } n \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant S - \varepsilon/2 \quad \text{für unendlich viele } n.$$

Befassen wir uns zunächst mit der Abschätzung nach oben: Sie liefert

$$\sqrt[n+k]{|a_{n+k}|} \leqslant S + \varepsilon/2, \quad \text{also} \quad |a_{n+k}| \leqslant (S + \varepsilon/2)^{n+k} \quad \text{für fast alle } n$$

Dies impliziert

$$\sqrt[n]{|a_{n+k}|} \leqslant (S+\varepsilon/2)(S+\varepsilon/2)^{k/n} \quad \text{für fast alle } n.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $(S+\varepsilon/2)^{k/n}$ gegen 1; für alle ausreichend großen n ist daher $(S+\varepsilon/2)^{k/n} \leqslant (S+\varepsilon)/(S+\varepsilon/2)$, denn dies ist eine Zahl > 1. Es folgt

$$\sqrt[n]{|a_{n+k}|} \leqslant S+\varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

Genauso sieht man auch ein, dass $\sqrt[n]{|a_{n+k}|} \geqslant S-\varepsilon$ für unendlich viele n gilt.

Da diese Überlegungen für alle $\varepsilon > 0$ gelten, folgt $\limsup \sqrt[n]{|a_{n+k}|} = S$.

Aufgabe 8 Es gilt nur dann $f_n(x) \neq 0$, wenn

$$n - n^2|x-\tfrac{1}{n}| > 0, \quad \text{also} \quad |x-\tfrac{1}{n}| < \tfrac{1}{n}, \quad \text{d. h.} \quad 0 < x < \tfrac{2}{n}.$$

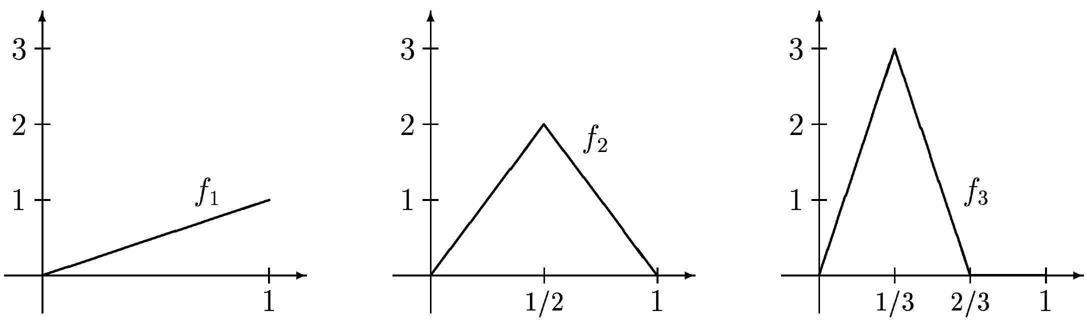
Für $0 < x \leqslant \frac{1}{n}$ gilt

$$f(x) = n - n^2(\tfrac{1}{n} - x) = n^2 x,$$

und für $\frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}$ ergibt sich

$$f(x) = n - n^2(x - \tfrac{1}{n}) = 2n - n^2 x.$$

Wir erhalten die folgenden Schaubilder:



(Man beachte, dass der Maßstab auf x- und y-Achse unterschiedlich gewählt ist und dass zum Schaubild von f_3 auch der Abschnitt der x-Achse zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 gehört.)

Berechnen wir noch die Grenzwerte:

Oben haben wir schon festgestellt, dass $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich haben wir trivialerweise $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Oben hatten wir auch gesehen, dass $f_n(x) = 0$ für $x \geqslant \frac{2}{n}$ gilt. Für jedes $x \in (0,1]$ gilt daher: Ist $n \geqslant \frac{2}{x}$, so folgt $f_n(x) = 0$. Die Folge $(f_n(x))$ ist also ab einem gewissen Index konstant 0. Dies liefert $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in (0,1]$, insbesondere also für die beiden gegebenen Werte $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{100}$.

Beim letzten Grenzwert ist auch das Argument von n abhängig; hier ergibt sich

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = \max\{n - n^2|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}|, 0\} = \max\{n, 0\} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$