

Lösung zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a) Dieser Grenzwert existiert; es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{-1}{\sqrt{9} + 3} = -\frac{1}{6}.$$

b) Für $x \rightarrow 0$ konvergiert der Zähler des Bruches gegen -4 , und der Nenner hat in $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel: $x^3 - 2x^2 + 7x = x(x^2 - 2x + 7)$; es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + 7x} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + 7x} = -\infty.$$

Da diese beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen, existiert der zu betrachtende Grenzwert nicht.

c) Zähler und Nenner haben -1 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) \quad \text{und} \quad x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1).$$

Folglich existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 4)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 4}{x^2 + 1} = \frac{-1 + 4}{(-1)^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$

d) Hier hat der Nenner in $x = 2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x + 2}{x^3 - x^2 + 3x} = \frac{2^2 + 7 \cdot 2 + 2}{2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2} = \frac{20}{10} = 2.$$

Aufgabe 2 a) Für $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$ verwenden wir die Gleichung

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad \text{also} \quad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

und erhalten

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}.$$

Folglich ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}.$$

b) Gemäß binomischem Satz gilt

$$\left(1 + \frac{9}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{9}{x}\right)^k = 1 + 9 \cdot \frac{9}{x} + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^9$$

mit $a_k = \binom{9}{k}$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{9} \left(\left(1 + \frac{9}{x}\right)^9 - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{9} \left(9 \cdot \frac{9}{x} + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^9 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + a_2 \left(\frac{9}{x}\right)^1 + a_3 \left(\frac{9}{x}\right)^2 + \cdots + a_9 \left(\frac{9}{x}\right)^8 \right) = 9. \end{aligned}$$

c) Zur Abkürzung setzen wir $a := \sqrt{x^2 + x}$ und $b := \sqrt{x^2 - x}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} - 2x &= a - x + b - x = \frac{a^2 - x^2}{a + x} + \frac{b^2 - x^2}{b + x} = \frac{x}{a + x} + \frac{-x}{b + x} \\ &= \frac{x(b + x) - x(a + x)}{(a + x)(b + x)} = \frac{x(b - a)}{(a + x)(b + x)} = \frac{x(b - a)(b + a)}{(a + x)(b + x)(b + a)} \\ &= \frac{x(b^2 - a^2)}{(a + x)(b + x)(b + a)} = \frac{-2x^2}{(a + x)(b + x)(a + b)}. \end{aligned}$$

Damit folgt wegen $a/x \rightarrow 1$ und $b/x \rightarrow 1$ (a und b sind von x abhängig) für $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{(a + x)(b + x)(a + b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{(a/x + 1)(b/x + 1)(a/x + b/x)} = \frac{-2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

d) Dies ist wieder ein einfacher Fall:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 + 2x^{-1} + x^{-3}}{2 + 7x^{-2}} = \frac{8}{2} = 4.$$

Aufgabe 3 Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Für $x > 1$ und für $x < 1$ ist f offenbar stetig; damit f auch an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x).$$

Nun haben wir

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = 2 + a \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 - 1 = 1;$$

somit muss $a = -1$ gelten.

Aufgabe 4 Diese Funktion ist nur in $x = \frac{1}{2}$ stetig.

Ist nämlich (x_n) eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, so gilt $f(x_n) = x_n$ oder $f(x_n) = 1 - x_n$ und wegen $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ und $1 - x_n \rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ folgt $f(x_n) \rightarrow \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$ für $n \rightarrow \infty$.

Ist dagegen $x_0 \neq \frac{1}{2}$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Nach Aufgabe 2 vom 8. Übungsblatt existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $f(x_n) = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \neq 1 - x_0 = f(x_0)$, d. h. es gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. (Man kann sich sogar überlegen, dass dieser Grenzwert nicht existiert.)

2. Fall: $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x_n := x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und damit gilt $f(x_n) = 1 - x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - x_0 \neq x_0$, d. h. auch hier gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Aufgabe 5 a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Wegen $R(g) \subset [a, b]$ ist $h(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$. Gilt $h(a) = 0$ oder $h(b) = 0$, so haben wir $g(a) = a$ bzw. $g(b) = b$. Sonst ist $h(a) < 0$ und $h(b) > 0$; da h stetig ist, gibt es also ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h(x_0) = 0$, d. h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f offensichtlich stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) \leq 1$. Für die stetige Funktion $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ gilt gemäß **a)** daher: Es gibt mindestens ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f .)

c) Man beachte: x_0 ist jetzt irgendeine Zahl aus dem Intervall $[0, 2]$, es wird also *nicht* $f(x_0) = x_0$ vorausgesetzt. (Sonst wäre die definierte Folge konstant und damit selbstverständlich konvergent.)

Probiert man ein paar Anfangswerte x_0 aus, so stellt man fest, dass sich stets eine monotone Folge ergibt. Dass dies so sein muss, kann man wie folgt einsehen: Wegen

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$$

ist die Funktion f monoton wachsend. Dies bedeutet aber: Ist x_0 so gewählt, dass $x_0 \leq f(x_0) = x_1$, so folgt induktiv, dass (x_n) monoton wächst ($x_{n-1} \leq x_n$ impliziert $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$, also $x_n \leq x_{n+1}$); ist dagegen $x_0 \geq x_1$, so fällt (x_n) monoton.

Wegen $0 \leq x_n \leq 2$ ist (x_n) eine beschränkte, monotone Folge und damit konvergent.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $x_{n+1} = f(x_n)$ den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert ξ der Folge (x_n) die Gleichung $\xi = f(\xi)$, d. h. ξ ist Fixpunkt von f . Rechnen wir ξ aus: Es gilt $\xi(\xi + 3) = \xi + 2$, also $\xi^2 + 2\xi - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $\xi_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2}$. Wegen $\xi \geq 0$ ist also $\xi = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 6 a) Korrektur: Die Aufgabenstellung ist falsch. Man muss zusätzlich noch $a_{13} \neq 0$ voraussetzen.

O.B.d.A. sei $a_{13} > 0$. (Sonst geht man analog vor.) Da 13 eine ungerade Zahl ist, gilt dann $p(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ und $p(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. Für ein hinreichend großes $M > 0$ ist daher

$p(M) > 13$ und $p(-M) < 13$. Da p stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: Es gibt mindestens ein $x_0 \in (-M, M)$ mit $p(x_0) = 13$.

b) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung trivial. Sonst wählen wir ein x_1 mit $f(x_1) \neq 0$ und setzen $\varepsilon := |f(x_1)|$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{für } x < -M \text{ und für } x > M.$$

Nach Definition von ε ist also insbesondere $x_1 \in [-M, M]$.

Die stetige Funktion $g : [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) := |f(x)|$ nimmt auf dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[-M, M]$ ihr Maximum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [-M, M]$ mit $g(x) \leq g(x_0)$ für alle $x \in [-M, M]$.

Für $x \in [-M, M]$ gilt somit $|f(x)| = g(x) \leq g(x_0) = |f(x_0)|$; auch für $x \notin [-M, M]$ ist

$$|f(x)| < \varepsilon = |f(x_1)| \leq \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

c) Die stetige Funktion f nimmt auf $[a, b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x) \geq f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann folgt

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty.$$

Die Funktion $1/f$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke ist 0.

Aufgabe 7 a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind.

Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Dort gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + na}. \end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{1+na} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$; für $n \geq N$ ist dann also $\sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist die Konvergenz wiederum *nicht* gleichmäßig, denn es ist $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, \infty)\} = 1$.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n ; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Hier gilt $|1 - x| \leq \frac{1}{2}$, also

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \leq 2^{-n},$$

und wie bei a) bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch *nicht* gleichmäßig, denn $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, 1]\} = 1$.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Dass $nq^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \rightarrow q < 1$ für $n \rightarrow \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

Dies bedeutet aber $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \geq \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen n und schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

Aufgabe 8 a) Setzt man $x = 1$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x) = (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1 - x)x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1 - x) \cdot \frac{1}{1 - x} = x.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen, in $x = 1$ nicht stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf $(-1, 1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^N x^n (1-x) - x \right| = \left| (1-x)x \sum_{n=0}^{N-1} x^n - x \right| = \left| (1-x)x \frac{1-x^N}{1-x} - x \right| = |x^{N+1}|,$$

und offenbar ist $\sup\{|x^{N+1}| : x \in (-1, 1)\} = 1$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium: Die vorliegende Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf ganz $\mathbb{R}$.