UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
21.12.1999

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den jeweiligen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ auf $I=[0,1]$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I=\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I=\mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I=\mathbb{R}$

Aufgabe Y2K Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2n)!}{44^{n-1}(3n)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{4k-1}(6+(-1)^k)^{3k}}$

Aufgabe 3 Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{4n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} x^{2n}$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

gilt, und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius $r=1$ besitzt. Berechnen Sie nun für $|z|<1$ die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5 Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 6 Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \qquad a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius r von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt $r \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Die Potenzreihe stellt also auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eine Funktion f dar. Zeigen Sie:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1\,.$$

c) Folgern Sie: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{x - x_2} - \dfrac{1}{x - x_1}\right)$ mit gewissen Zahlen x_1 und x_2.

d) Gewinnen Sie daraus eine Potenzreihenentwicklung von f und leiten Sie dann eine (nicht rekursive) Formel für a_n ab.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(x) = (1 + x + x^2)^{-2}, \quad x_0 = 0$

b) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

c) $f(z) = \dfrac{1 - z}{1 - z - 2z^2}, \quad z_0 = 2$

d) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Frohe Weihnachten und alles Gute für die 2000er Jahre!

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1**, **2**, **5** und **6**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.