

Lösung zum 10. Übungsblatt

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

Aufgabe 1 a) Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\left| \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \right| = \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{n}{n^3 + x^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, können wir das Majorantenkriterium anwenden: Die Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $[0, 1]$.

b) Setzt man $x = 0$ ein, so hat die Reihe den Wert 0. Für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^k = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1+x^2.$$

Die Funktionenreihe konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, die durch die Partialsummen der Reihe dargestellten Funktionen aber offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein. (Denn sonst würde sich die Stetigkeit übertragen.)

c) Wegen $1+x+x^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ gilt $1+x+x^2 \geq \frac{3}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$|e^{-n(1+x+x^2)}| = e^{-n(1+x+x^2)} \leq e^{-3n/4}.$$

Da die Reihe über $e^{-3n/4}$ konvergiert (geometrische Reihe), liefert das Majorantenkriterium wieder gleichmäßige und damit auch punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Für $x = 0$ konvergiert die Reihe offensichtlich mit Wert 0; für $x \neq 0$ folgt die Konvergenz aus dem Leibnizkriterium. (Natürlich könnte man den Wert wieder konkret ausrechnen, da es sich um eine geometrische Reihe handelt.) Wir setzen

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} \quad \text{und} \quad f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k},$$

und zeigen nun, dass sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Das Leibnizkriterium liefert für $x \neq 0$ die Abschätzung

$$|f(x) - f_n(x)| = x^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} \right| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Diese Abschätzung stimmt trivialerweise auch für $x = 0$.

Ist ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt für $|x| \leq \sqrt{\varepsilon}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \varepsilon \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

und für $|x| > \sqrt{\varepsilon}$ ergibt sich

$$|f(x) - f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq (1+x^2) \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

Wählen wir nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(1+\varepsilon)^{-n} \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt, so folgt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \geq n_0.$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe bewiesen.

Aufgabe 2 a) Es bezeichne a_n den zu z^n gehörenden Koeffizienten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{3^n n! (2n)!}{44^{n-1} (3n)!} \cdot \frac{44^n (3n+3)!}{3^{n+1} (n+1)! (2n+2)!} = \frac{44(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3(n+1)(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{44(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}{3(1+1/n)(2+2/n)(2+1/n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{44 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{44 \cdot 9}{4} = 99. \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist also 99.

b) Wieder bezeichne a_k den Koeffizienten von x^k . Dann folgt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2^{4-1/k}(6+(-1)^k)^3} = \begin{cases} \frac{1}{2^{4-1/k}(6+1)^3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{4.7^3}} = \frac{1}{5488}, & k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2^{4-1/k}(6-1)^3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{4.5^3}} = \frac{1}{2000}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Als Konvergenzradius ergibt sich also $r = (\limsup \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = (\frac{1}{2000})^{-1} = 2000$.

Aufgabe 3 a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_n := (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^{4n}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot x^4.$$

Folglich konvergiert die Reihe für $e \cdot x^4 < 1$ (also $|x| < e^{-1/4}$) und divergiert für $e \cdot x^4 > 1$ (also $|x| > e^{-1/4}$); ihr Konvergenzradius ist daher $e^{-1/4}$. Untersuchen wir noch den Rand: Beide Randpunkte liefern die gleiche Reihe, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}.$$

Diese Reihe konvergiert nicht, denn die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0: Aus Aufgabe 1 des 8. Übungsblattes wissen wir $(1 + \frac{1}{n})^n \geq e - \frac{3}{n}$ und erhalten damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = \left(\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e}\right)^n \geq \left(\frac{e - \frac{3}{n}}{e}\right)^n = \left(1 - \frac{3/e}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-3/e}.$$

Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $|x| < e^{-1/4}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius $1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = 2|z|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k$. Die Reihe konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Wieder wenden wir direkt das Wurzelkriterium an: Es gilt

$$\sqrt[n]{|e^{n(1+(-1)^n \cos \frac{1}{n})} x^{2n}|} = \begin{cases} e^{1+\cos \frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{1+1} x^2 = e^2 x^2, & n \text{ gerade,} \\ e^{1-\cos \frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{1-1} x^2 = x^2, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^{2n}|} = e^2 x^2$. Die Reihe konvergiert für $e^2 x^2 < 1$ und divergiert für $e^2 x^2 > 1$, d. h. der Konvergenzradius ist e^{-1} . An den Randpunkten ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos \frac{1}{n})} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n((-1)^n \cos \frac{1}{n} - 1)}.$$

Diese Reihe ist divergent, da die Reihenglieder nicht gegen 0 streben: Für gerades n gilt nämlich wegen der Reihendarstellung von $\cos x$

$$e^{n((-1)^n \cos \frac{1}{n} - 1)} = e^{n(\cos \frac{1}{n} - 1)} = e^{n(-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^4 - \dots)} = e^{-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^4 - \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1.$$

Aufgabe 4 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ zeigen wir mit vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \text{ absolut, mit dem Wert } \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ eine geometrische Reihe vor uns. Diese konvergiert bekanntlich absolut und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.

Induktionsschluss: Die Behauptung sei nun für ein gewisses k bereits gezeigt. Dann bilden wir das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung konvergiert die erste Reihe absolut und da auch die geometrische Reihe absolut konvergiert, ist auch das Cauchyprodukt der Reihen absolut konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} \right) z^n.$$

Die Induktionsbehauptung ist also gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach n :

Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.

Induktionsschluss: Ist die Gleichheit für n bewiesen, so folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} = \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{n+1+k+1}{n+1}.$$

Wir wissen nun insbesondere, dass für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $r \geq 1$ gilt; zudem ist $\binom{n+k}{n} \geq 1$, also $\limsup \binom{n+k}{n}^{1/n} \geq 1$ und damit $r \leq 1$. Folglich gilt $r = 1$.

Wegen $\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2-3(1-z)+(1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

und wegen $2n+1 = 2(n+1) - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n} &= -z^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (z^2)^n = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (z^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n \\ &= -1 + \frac{2}{(1-z^2)^2} - \frac{1}{1-z^2} = \frac{-(1-z^2)^2 + 2 - (1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{3z^2 - z^4}{(1-z^2)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n, \quad \text{also} \quad 1 = (x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n.$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n) (x+1)^n.\end{aligned}$$

Diese Potenzreihe soll den Wert 1 haben; wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen liefert dies die Gleichungen

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Bemerkung: Man kann die Aufgabe auch lösen, indem man $f(x) = ((x+1)^2 - 4)^{-1} = -\frac{1}{4}(1 - (\frac{x+1}{2})^2)^{-1}$ als geometrische Reihe entwickelt.

Aufgabe 6 a) Es gilt $a_n \leq 2^n$, wie man mit vollständiger Induktion sieht:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 0$ und $n = 1$ richtig.

Induktionsschluss: Ist die Behauptung für $n-1$ und n bewiesen (wobei $n \geq 1$), so folgt

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1} \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Folglich ergibt sich $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 2$ und damit gilt für den Konvergenzradius r der zu betrachtenden Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \geq \frac{1}{2}$.

b) Für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1. \end{aligned}$$

c) Aus b) wissen wir

$$(1 - x - x^2)f(x) = 1, \quad \text{also} \quad f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Nun hat $x^2 + x - 1$ die Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 + 1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ und es gilt

$$\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} = \frac{x - x_1 - (x - x_2)}{(x - x_2)(x - x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{x^2 + x - 1} = \frac{-\sqrt{5}}{x^2 + x - 1} = \sqrt{5} \cdot f(x)$$

Mit diesen Zahlen x_1 und x_2 hat man also die behauptete Darstellung.

d) Allgemein gilt

$$\frac{1}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 - x/x_0} = -\frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_0^{n+1}}.$$

Aus c) ergibt sich somit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_2^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n.$$

Wegen

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})} = \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

liefert dann der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Aufgabe 7 a) Wir suchen eine Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nun ist

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 + x + x^2} \right)^2 = \left(\frac{1 - x}{(1 + x + x^2)(1 - x)} \right)^2 = \left(\frac{1 - x}{1 - x^3} \right)^2 = (1 - x)^2 \frac{1}{(1 - x^3)^2}$$

und gemäß Aufgabe 4 ergibt sich für $|x| < 1$

$$= (1 - 2x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)x^{3n} - 2(n+1)x^{3n+1} + (n+1)x^{3n+2}).$$

Folglich gilt: $a_{3n} = a_{3n+2} = n+1$ und $a_{3n+1} = -2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offenbar 1.

b) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um den Punkt 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + z - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2k} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n$ gilt also:

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞ .

c) Es gilt $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2},$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3} \\ &= \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n \end{aligned}$$

für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ und $\frac{2}{3}|z-1| < 1$. Für die Koeffizienten in $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ ergibt sich also $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$. Der Konvergenzradius ist $\frac{3}{2}$.

d) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$, also

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 4^k x^{2k}.$$

Für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt also $a_0 = 1$, $a_{2k-1} = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2}(-1)^k 4^k / (2k)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ist offenbar ∞ .