UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
11.1.2000

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Bestimmen Sie jeweils die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 der Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für

a) $\tanh x$ **b)** $\dfrac{e^x}{\cos x}$

Aufgabe 2 Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{4n}}{(2n)!}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2^{2n+1}(2n+1)!} z^{2n}$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2}$ $(a > 0)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}$

Hinweis zu **c)** und **d)**: Logarithmieren Sie den zu untersuchenden Term.

Aufgabe 4 Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\arcsin_{k+1}(x) = \arccos_k(x) + \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 5 **a)** Bestimmen Sie alle $x > 0$, für die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ gilt.

b) Zeigen Sie: Die Ungleichung $|\sin(ax)| \leqslant a|\sin x|$ gilt für alle $a \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt sie sogar für alle $a > 0$?

c) Es sei $a > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(t) = \sin(t) + \sin(at)$. Beweisen Sie, dass f genau dann periodisch ist, wenn a eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 6 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\cosh z + \sinh z)^n = \cosh(nz) + \sinh(nz)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} = \cos(\sin x)e^{\cos x}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} = \sin(\sin x)e^{\cos x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos w - \cos z = -2\sin\left(\frac{w+z}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{w-z}{2}\right)$.

d) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(z/2)}$.

Aufgabe 7 Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt: $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$

b) $x\sin(x^{-1}) = O(x)$ für $x \to 0$

c) $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \to 0$

d) $\sqrt{1+x^2} = x + O(1/x)$ für $x \to \infty$

Aufgabe 8 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1**, **3**, **4** und **5**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.