UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
18.1.2000

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gegeben wird, beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils, wo die Funktion differenzierbar ist und berechnen Sie dort die Ableitung.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \dfrac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(cx)} - \dfrac{2}{x}, & x \in (-\pi, \pi) \text{ und } x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (wobei $0 < |c| < 1$)

Aufgabe 3 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

b) Berechnen Sie daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie daraus erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind und bestimmen Sie jeweils die Konstante.

a) $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x^{-1}) \qquad (x > 0)$

b) $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{3 + 5\cos x}{5 + 3\cos x}\right) - 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\tan(\frac{1}{2}x)\right) \qquad (0 \leqslant x < \pi)$

— bitte wenden —

Aufgabe 5 **a)** Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Aussage?

$$\text{Für alle } x > 0 \text{ ist } e^x > x^t\,.$$

b) Und für welche Zahlen $a > 0$ gilt die folgende Abschätzung?

$$x^a \leqslant a^x \quad \text{für alle } x \geqslant 1$$

Aufgabe 6 Durch $f(x) := \ln(1+x)$ ist eine Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert. Geben Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ an $(n \in \mathbb{N})$ und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Grenzwerte unter Verwendung des Mittelwertsatzes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\bigl(1 - \cos\frac{1}{n}\bigr)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \bigl(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\bigr)$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta}$ (wobei $a > 0$ und $\beta \neq 0$)

Aufgabe 8 Auf dem Intervall $[a, b]$ sind die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ gegeben durch $f_j(x) = e^{\beta_j x}$ mit paarweise verschiedenen komplexe Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_n$ (d. h. $\beta_j \neq \beta_k$ für $j \neq k$). Beweisen Sie, dass die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Übungsklausur Die zweite Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 5. Februar (Samstag), 8 – 10 Uhr statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich in der Zeit vom 24.1. bis 27.1. (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3**, **4**, **5** und **8**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.