UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
24.1.2000

Lösung zum 12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Mit vollständiger Induktion zeigen wir folgende Aussage:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{(n)}$ existiert, und mit einem gewissen Polynom p_n ist

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Behauptung nach Definition von f mit $p_1(y) = 1$.
Induktionsschluss: Für ein gewisses n sei die Behauptung nun gezeigt. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt dann gemäß Ketten- und Produktregel: $f^{(n)}$ ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \big(p_n(\tfrac{1}{x})\big)' \exp(-\tfrac{1}{x^2}) + p_n(\tfrac{1}{x})\big(\exp(-\tfrac{1}{x^2})\big)' \\ &= -\tfrac{1}{x^2}p_n'(\tfrac{1}{x}) \exp(-\tfrac{1}{x^2}) + p_n(\tfrac{1}{x})\big(\tfrac{2}{x^3}\exp(-\tfrac{1}{x^2})\big) = \big(-\tfrac{1}{x^2}p_n'(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{2}{x^3}p_n(\tfrac{1}{x})\big)\exp(-\tfrac{1}{x^2})\,. \end{aligned}$$

Mit $p_{n+1}(y) := -y^2p_n'(y) + 2y^3p_n(y)$ gilt also für $x \neq 0$ die behauptete Darstellung. (Man beachte, dass auch p_n' ein Polynom ist.) Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{p_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})}{x} = 0$$

gilt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $y^k e^{-y} \to 0$ für $y \to \infty$ gilt. Setzt man $y = |x|^{-1}$, so folgt $|x|^{-k}e^{-1/|x|} \to 0$ für $x \to 0$. Für $|x| < 1$ ist $-1/x^2 < -1/|x|$, also ergibt sich auch $x^{-k}e^{-1/x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$. Der obige Grenzwert ist somit tatsächlich 0.

Aufgabe 2 **a)** Wegen $x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\,)^2 + \frac{1}{2} > 0$ ist der Logarithmus für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert; es gilt

$$\begin{aligned} \Big(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\Big)' &= \Big(\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\Big)' \\ &= \frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \cdot \Big(1 + \frac{2\sqrt{2}\,x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\Big)' \\ &= \frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} \cdot \frac{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}\,x+1) - 2\sqrt{2}\,x(2x-\sqrt{2}\,)}{(x^2-\sqrt{2}\,x+1)^2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}\,x^2+2\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)} = \frac{2\sqrt{2}(-x^2+1)}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2} = \frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{x^4+1}\,. \end{aligned}$$

Das Argument von Arctan ist für $x = -1$ und für $x = 1$ nicht definiert. Für $|x| \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}\right)' &= \left(1+\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}\right)^2\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}\right)' \\ &= \left(\frac{(1-x^2)^2+2x^2}{(1-x^2)^2}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-x^2)-\sqrt{2}\,x(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^2}{x^4+1}\cdot\frac{\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{2}}{(1-x^2)^2} = \sqrt{2}\,\frac{x^2+1}{x^4+1}\,.\end{aligned}$$

Die Funktion f ist somit für $x \neq \pm 1$ differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^4+1)} + \frac{x^2+1}{2(x^4+1)} = \frac{1}{1+x^4}\,.$$

b) Wegen der Voraussetzungen für c ist $\sin(cx) \neq 0$ für $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$. f ist differenzierbar auf $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ und dort gilt

$$f'(x) = -\frac{c\cos(cx)}{\sin^2(cx)} + \frac{2}{x^2}\,.$$

Die Funktion f ist auch in 0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

existiert. Weil für $x \to 0$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(cx)}-\frac{2}{x}\right) = \frac{x-2\sin(cx)}{x^2\sin(cx)} = \frac{x-2\big(cx-\frac{1}{3!}(cx)^3+o(x^4)\big)}{x^2\big(cx-\frac{1}{3!}(cx)^3+o(x^4)\big)} \\ &= \frac{(1-2c)x+\frac{2}{3!}c^3x^3+o(x^4)}{cx^3-\frac{1}{3!}c^3x^5+o(x^6)} = \frac{(1-2c)x^{-2}+\frac{2}{3!}c^3+o(x)}{c-\frac{1}{3!}c^3x^2+o(x^3)}\end{aligned}$$

gilt, ist dies genau für $1-2c=0$, also $c=\frac{1}{2}$, der Fall. Dann ergibt sich $f'(0) = \frac{2}{3!}c^2 = \frac{1}{12}$.

Aufgabe 3 **a)** Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2}\cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned}1-(f(x))^2 &= 1-\big(1-8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1-\big(1-16(e^{2x}+4)^{-1}+64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1}-64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4)-4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2}\end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall y \in (-1,1): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y \quad \leftrightarrow \quad (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \quad \leftrightarrow \quad 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x}$$
$$\leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(8(1-y)^{-1} - 4\bigr)$$

Daraus ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1}-4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1-\frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1-(-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 4 **a)** Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot \bigl(-x^{-2}\bigr) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung auf ganz $(0,\infty)$ verschwindet, ist die Funktion dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt $f(x) = f(1) = 2\,\mathrm{Arctan}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

b) Stets gilt $-1 \leqslant \frac{3+5\cos x}{5+3\cos x} \leqslant 1$ (Ungleichungskette mit Nenner durchmultiplizieren) und für $x \in [0,\pi)$ ist $\tan(\frac{1}{2}x)$ definiert; die Definition der Funktion f ist also sinnvoll.

Betrachten wir zunächst den Arcustangens. Mit der Kettenregel ergibt sich wegen $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$ und $\mathrm{Arctan}'(x) = (1+x^2)^{-1}$

$$\Bigl(\mathrm{Arctan}\bigl(\tfrac{1}{2}\tan(\tfrac{1}{2}x)\bigr)\Bigr)' = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\tan^2(\frac{1}{2}x)} \cdot \tfrac{1}{2}(1+\tan^2(\tfrac{1}{2}x)) \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$= \frac{1+\tan^2(\frac{1}{2}x)}{4+\tan^2(\frac{1}{2}x)} \cdot \frac{\cos^2(\frac{1}{2}x)}{\cos^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}$$

für alle $x \in (0,\pi)$. Jetzt zum Arcuscosinus: Zunächst brauchen wir die Ableitung von Arccos. Für alle $x \in (0,\pi)$ gilt $\sin x > 0$ und damit $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Für alle $y \in (-1,1)$ ist $\mathrm{Arccos}\, y \in (0,\pi)$; wegen $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ für $x \in (0,\pi)$ folgt somit

$$\mathrm{Arccos}'(y) = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}\, y)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{Arccos}\, y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Damit erhalten wir für $x \in (0,\pi)$

$$\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{(5+3\cos x)^2-(3+5\cos x)^2}{(5+3\cos x)^2}}} \cdot \frac{-5\sin x(5+3\cos x)-(3+5\cos x)(-3\sin x)}{(5+3\cos x)^2}$$
$$= -\frac{5+3\cos x}{\sqrt{16-16\cos^2 x}} \cdot \frac{-16\sin x}{(5+3\cos x)^2} = \frac{4\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\,(5+3\cos x)}\,;$$

wegen $x \in (0,\pi)$ gilt wieder $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$, also

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{5+3\cos x} = \frac{4}{5(\sin^2(\frac{1}{2}x)+\cos^2(\frac{1}{2}x))+3(\cos^2(\frac{1}{2}x)-\sin^2(\frac{1}{2}x))} \\ &= \frac{2}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}\,. \end{aligned}$$

Insgesamt: $f'(x) = 0$ auf $(0,\pi)$. (Beachte: f ist in $x=0$ nicht differenzierbar.) Da f auf $[0,\pi)$ stetig ist, ist f dort konstant mit $f(x) = f(0) = \operatorname{Arccos}(\frac{8}{8}) - 2\operatorname{Arctan}(0) = 0$.

Aufgabe 5 **a)** Für $t<0$ trifft die Aussage nicht zu, denn in diesem Falle gilt $x^t \to \infty$ für $x \to 0$. Für $t=0$ ist sie hingegen offenbar richtig.

Wir müssen im folgenden also nur noch den Fall $t>0$ betrachten: Logarithmieren wir die Abschätzung $e^x > x^t$, so ergibt sich

$$x > \ln(x^t) = t\ln x, \qquad \text{also} \qquad t^{-1} > \frac{\ln x}{x}\,.$$

Setzen wir $g(x) := (\ln x)/x$, so lässt sich unsere Frage wie folgt umformulieren: Für welche $t>0$ nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an?

Für $x \in (0,1]$ gilt $g(x) \leqslant 0$. Aus $g'(x) = (\frac{1}{x}\cdot x - \ln x)/x^2 = (1-\ln x)/x^2$ können wir folgendes schließen: Für $x \in (1,e)$ ist $g(x) > 0$, also g monoton steigend, für $x \in (e,\infty)$ ist $g(x) < 0$, also g monoton fallend. Die Funktion erreicht ihr Maximum somit an der Stelle $x = e$ mit $g(e) = e^{-1}$. Also: Genau dann nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an, wenn $e^{-1} < t^{-1}$, also $e > t$.

Die Antwort auf die Frage lautet: Die Aussage gilt genau dann, wenn $0 \leqslant t < e$.

b) Logarithmieren der Abschätzung liefert

$$a\ln x \leqslant x\ln a, \quad \text{also} \quad \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln a}{a}\,.$$

Nach obigen Überlegungen gilt dies genau dann für alle $x \geqslant 1$, wenn $(\ln a)/a \geqslant e^{-1}$, da $\max_{x\geqslant 1}(\ln x)/x = e^{-1}$. Wiederum nach den obigen Überlegungen bedeutet dies $a = e$.

Aufgabe 6 Wir bilden einige Ableitungen:

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3},\ f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}\,.$$

Dann stellen wir die folgende Behauptung auf:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}\,.$$

Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion. Den Induktionsanfang haben wir gerade schon gemacht. Nun noch der Induktionsschluss: Gilt die Formel für ein gewisses n, so folgt durch Ableiten

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,\big(-n(1+x)^{-n-1}\big) = (-1)^{n+2}n!\,(1+x)^{-(n+1)}\,.$$

Aufgabe 7 **a)** Wir betrachten die Funktion f, die durch $f(x) = \cos x$ gegeben ist. Zu jedem $x > 0$ existiert dann laut Mittelwertsatz ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{also} \quad -\sin \xi = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Insbesondere gibt es zu $x_n = \frac{1}{n}$ ein solches ξ_n. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0.$$

b) Hier nehmen wir $f(y) = \cos \sqrt{y}$. Zu jedem x existiert dann ein $\xi \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi), \quad \text{also} \quad \frac{\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}.$$

Also ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\,\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

und da für $x \to \infty$ auch $\xi \to \infty$ gilt, ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

c) Hier sei $f(x) := x^\beta$ und $g(x) := x^\delta$. Zu $x \neq a$ gibt es dann ξ zwischen a und x mit

$$\frac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta} = \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{\delta \xi^{\delta - 1}}{\beta \xi^{\beta - 1}} = \frac{\delta \xi^{\delta - \beta}}{\beta}.$$

Für $x \to a$ gilt auch $\xi \to a$ und der Quotient strebt gegen $(\delta/\beta) a^{\delta - \beta}$.

Aufgabe 8 Lineare Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ bedeutet: Die Gleichung $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ kann nur für $a_1 = \cdots = a_n = 0$ gelten.

Induktionsanfang: Es gelte $a_1 f_1 = 0$, also $a_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wegen $e^{\beta_1 x} \neq 0$ für alle x folgt dann $a_1 = 0$.

Induktionsschluss: Die Aussage sei nun für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und es gelte

$$(*) \qquad a_1 e^{\beta_1 x} + \cdots + a_{n+1} e^{\beta_{n+1} x} = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Ist $a_{n+1} = 0$, so folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Nehmen wir nun an, es gelte $a_{n+1} \neq 0$. O.B.d.A. setzen wir dann $a_{n+1} = 1$ voraus (sonst dividiere man $(*)$ durch a_{n+1}). Division durch $e^{\beta_{n+1} x}$ liefert die Gleichung

$$a_1 e^{(\beta_1 - \beta_{n+1})x} + \cdots + a_n e^{(\beta_n - \beta_{n+1})x} = -1.$$

Leitet man diese Gleichung nach x ab, so folgt

$$a_1 (\beta_1 - \beta_{n+1}) e^{(\beta_1 - \beta_{n+1})x} + a_n (\beta_n - \beta_{n+1}) e^{(\beta_n - \beta_{n+1})x} = 0.$$

Da die Zahlen $\beta_1 - \beta_{n+1}, \ldots, \beta_n - \beta_{n+1}$ paarweise verschieden sind, können wir hierauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Diese liefert

$$a_1 (\beta_1 - \beta_{n+1}) = \cdots = a_n (\beta_n - \beta_{n+1}) = 0$$

und wegen $\beta_j - \beta_{n+1} \neq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Wegen $a_{n+1} = 1$ besagt $(*)$ also, dass $e^{\beta_{n+1} x} = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Dies kann nicht sein; daher war unsere Annahme $(a_{n+1} \neq 0)$ falsch.