UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. A. Fröhlich

WS 1999/2000
25.1.2000

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Die Folge (x_n) konvergiere streng monoton fallend gegen 0 und es gelte $f(x_n) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ gelten muss.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe 3 Wie muss man den Radius und die Höhe einer zylindrischen Konservendose wählen, damit diese ein vorgegebenes Volumen V besitzt und zugleich möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

auf zwei verschiedene Arten: Mittels Potenzreihen und mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 5 Es sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Durch $f_t(x) := \frac{1}{2}(e^x + te^{-x})$ wird eine Funktion $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Beantworten Sie, in Abhängigkeit von t, folgende Fragen:

a) Ist das Schaubild von f_t symmetrisch zur y-Achse?
Ist es symmetrisch zum Ursprung?

b) Wo hat f_t Nullstellen? Welche Ordnung haben diese?

c) Wo besitzt f_t Extrema und Wendestellen?

— bitte wenden —

Aufgabe 6 **a)** Bestimmen Sie Zahlen a, b und c, für die gilt:

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leqslant cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1,1]$$

b) Berechnen Sie eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-6} unter Verwendung eines geeigneten Taylorpolynoms und der Darstellung $\sqrt{2} = \frac{10}{7}(1-\frac{1}{50})^{1/2}$.

Aufgabe 7 Für eine physikalische Größe werden n Messwerte $a_1, \ldots, a_n$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann die Zahl a an, die durch

$$f(a) = \min\{\, f(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{wobei} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2\,,$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a. Was ergibt sich, wenn man stattdessen die Funktion $g(x) = |x - a_1| + \cdots + |x - a_n|$ minimiert?

Aufgabe 8 Betrachten Sie die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + 2$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion ihr Maximum in genau einer Stelle ξ annimmt.

b) Berechnen Sie eine Näherung für ξ durch zwei Iterationen des Newtonverfahrens, beginnend bei $x_0 = 0$, und schätzen Sie den verbleibenden Fehler ab.

c) Geben Sie eine weitere Iterationsvorschrift an, die für beliebige Startwerte aus $[-1,1]$ eine gegen ξ konvergente Folge liefert.

Übungsklausur Die zweite Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 5. Februar (Samstag), 8 – 10 Uhr statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich bis 27.1. (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1**, **2**, **6** und **7**. Der Rest wird in den Tutorien behandelt.