

Lösung zum 13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Die Funktion f ist differenzierbar, also insbesondere stetig. Folglich gilt

$$f(0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Gemäß Mittelwertsatz (Beachte: $x_n > 0$) existiert zu jedem x_n ein $\xi_n \in (0, x_n)$ mit

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{0 - 0}{x_n - 0} = 0.$$

Wegen $x_n \rightarrow 0$ gilt auch $\xi_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, und weil f' stetig ist, folgt

$$f'(0) = f'\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Da wir wissen, dass f' differenzierbar ist, können wir $f''(0)$ bestimmen, indem wir eine spezielle Folge, die gegen 0 konvergiert, wählen: Es ergibt sich

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n) - f'(0)}{\xi_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{\xi_n - 0} = 0.$$

Aufgabe 2 a) Sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs streben für $x \rightarrow 0$ gegen 0. Zudem ist für $0 < |x| < \pi$ die Ableitung des Nenners ($\sin x$) ungleich 0. Daher liefert die Regel von de l'Hospital: Wenn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

existiert, so existiert auch der ursprünglich zu untersuchende Grenzwert und die beiden sind gleich. Hier haben wir erneut die Form „ $\frac{0}{0}$ “ und die Ableitung des Nenners ist $\neq 0$ in einer Umgebung von 0. Also erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1 + 1}{1} = 2.$$

b) Auch hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{falls die Grenzwerte existieren}),$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

c) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „ $\frac{0}{0}$ “; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 0 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \ln x)^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.$$

d) Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(1/x) + x^2 \sin(1/x) \frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n / \cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

e) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x} \cos x = e^{\sin x}(2 \cos^2 x + x \cos x + \sin x \cos^2 x) \\ &= e^{\sin x} \cos x(2 \cos x + x + \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x , für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos x}{e^{\sin x}(2 \cos x + x + \sin x \cos x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Aufgabe 3 Oberfläche A und Volumen V einer zylindrischen Konservendose mit Radius r und Höhe h berechnen sich wie folgt:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \text{und} \quad V = \pi r^2 h.$$

Bei vorgegebenem Volumen V gilt somit $h = V/(\pi r^2)$ und für die Oberfläche ergibt sich $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2V/r$.

Die Oberfläche soll möglichst klein werden. Wegen $A(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$ und für $r \rightarrow \infty$ folgt aus der Stetigkeit von $A(r)$, dass A auf $(0, \infty)$ ein Minimum hat. (Genaue Begründung: Es gibt ε und M mit $\varepsilon < 1 < M$ und $A(r) > A(1)$ für $r < \varepsilon$ und für $r > M$. Das Minimum, das A als stetige Funktion auf $[\varepsilon, M]$ besitzt, ist also auch das Minimum auf $(0, \infty)$.) Dort muss die Ableitung verschwinden:

$$A'(r) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Für die Höhe ergibt sich dann

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}} = \frac{V^{1/3} \cdot 2^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r.$$

Aufgabe 4 Mit Potenzreihen kommt man hier sehr schnell ans Ziel: Wegen

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))}{x^2(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!}x^4 + o(x^5)}{x^4 - \frac{2}{3!}x^6 + o(x^7)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + o(x^5)/x^4}{1 - \frac{2}{3!}x^2 + o(x^7)/x^4} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Mit der Regel von de l'Hospital dauert es etwas länger: Wir wenden sie viermal an; die entsprechenden Stellen sind mit (*) gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x \sin^2 x + x^2 \sin(2x)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(2x)}{2 \sin^2 x + 4x \sin x \cos x + 2x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(2x)}{2 \sin^2 x + 4x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(2x)}{4 \sin x \cos x + 4 \sin(2x) + 8x \cos(2x) + 4x \cos(2x) - 4x^2 \sin(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(2x)}{(6 - 4x^2) \sin(2x) + 12x \cos(2x)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos(2x)}{-8x \sin(2x) + 2(6 - 4x^2) \cos(2x) + 12 \cos(2x) - 24x \sin(2x)} \\ &= \frac{8}{0 + 12 + 12 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 a) Symmetrie bezüglich der y -Achse liegt genau dann vor, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_t(x) = f_t(-x)$.

$$f_t(x) = f_t(-x) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(e^x + te^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + te^x) \quad \leftrightarrow \quad (1-t)e^x = (1-t)e^{-x}$$

Offenbar ist dies genau für $t = 1$ erfüllt. Also: Nur das Schaubild von f_1 ist symmetrisch zur y -Achse, die anderen nicht.

Symmetrie zum Ursprung bedeutet $f_t(-x) = -f_t(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$f_t(-x) = -f_t(x) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(e^{-x} + te^x) = -\frac{1}{2}(e^x + te^{-x}) \quad \leftrightarrow \quad (t+1)e^x = -(t+1)e^{-x}$$

Da dies genau für $t = -1$ richtig wird, ist nur das Schaubild von f_{-1} ursprungssymmetrisch.

b) Um die Nullstellen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung $f_t(x) = 0$ betrachten, also $e^x = -te^{-x}$. Da hier links eine positive Zahl steht, kann dies nur für $t < 0$ erfüllt sein. Dann erhalten wir durch Logarithmieren $x = \ln(-t) - x$, also $x = \frac{1}{2} \ln(-t)$.

Um die Ordnung dieser Nullstelle zu finden, betrachten wir die Ableitung

$$f'_t(x) = \frac{1}{2}(e^x - te^{-x}).$$

Wegen $f'_t(\frac{1}{2} \ln(-t)) = \frac{1}{2}((-t)^{1/2} - t(-t)^{-1/2}) = (-t)^{1/2} \neq 0$ ist die Ordnung 1. Also: Nur für $t < 0$ hat f_t eine Nullstelle, und zwar in $x = \frac{1}{2} \ln(-t)$ mit Ordnung 1.

c) Um die Extremalstellen zu finden, setzen wir die Ableitung 0.

$$f'_t(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(e^x - te^{-x}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad e^x = te^{-x}$$

Diese Gleichung kann nur für $t > 0$ erfüllt sein; dann folgt $x = \frac{1}{2} \ln t$ und wegen $f''_t(x) = f_t(x) > 0$ ist dies ein Minimum. Also: Nur für $t > 0$ hat f_t ein Extremum, und zwar ein Minimum an der Stelle $x = \frac{1}{2} \ln t$.

Nun noch zu den Wendestellen: Es sind bei diesen Funktionen gerade die Nullstellen, da $f'' = f$ genau dort das Vorzeichen wechselt.

Aufgabe 6 **a)** Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion f , die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2},$$

und dies stimmt offenbar auch für $x = 0$ (mit beliebigem ξ). Daher gilt wegen $\xi \in [-1, 1]$

$$|f(x) - \ln 2 - \frac{1}{2}x| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leq \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

b) Wir betrachten $f(x) := \frac{10}{7}\sqrt{1+x}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in (-\frac{1}{50}, 0)$ mit

$$\sqrt{2} = f(-\frac{1}{50}) = T_{n-1}(f, 0)(-\frac{1}{50}) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(-\frac{1}{50})^n.$$

Jetzt wollen wir n so groß wählen, dass das Restglied betragsmäßig kleiner als 10^{-6} wird. Es zeigt sich, dass dies schon für $n = 3$ erfüllt ist; wegen

$$\left| \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{50}\right)^3 \right| = \frac{1}{6 \cdot 50^3} = \frac{8}{6 \cdot 100^3} = \frac{4}{3} 10^{-6}$$

müssen wir nur noch $|f^{(3)}(\xi)| < \frac{3}{4}$ zeigen. Wegen $|\xi| \leq \frac{1}{50}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(\xi)| &= \left| \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+\xi)^{-5/2} \right| = \frac{15}{28} (1+\xi)^{-5/2} \\ &\leq \frac{15}{28} \left(\frac{49}{50}\right)^{-5/2} = \frac{15 \cdot \sqrt{50}^5}{28 \cdot 7^5} \leq \frac{15 \cdot 8 \cdot 50^2}{28 \cdot 7^5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 50^2}{7^6}. \end{aligned}$$

Nun möchten wir $\frac{5 \cdot 8 \cdot 50^2}{7^6} < 1$ zeigen. Dies stimmt wegen

$$7^6 = 49^3 > 48^3 = (2^4 \cdot 3)^3 = 2^{12} \cdot 3^3 = 4096 \cdot 27 > 4000 \cdot 25 = 100000 = 5 \cdot 8 \cdot 50^2.$$

(Natürlich könnte man auch 7^6 ausrechnen.) Als Näherung für $\sqrt{2}$ erhalten wir unter Benutzung von $f'(x) = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ und $f''(x) = \frac{10}{7} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(1+x)^{-3/2}$

$$\begin{aligned} T_2(f, 0)(-\frac{1}{50}) &= f(0) + f'(0)(-\frac{1}{50}) + \frac{1}{2!}f''(0)(-\frac{1}{50})^2 = \frac{10}{7}(1 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{50}) - \frac{1}{8} \cdot (-\frac{1}{50})^2) \\ &= \frac{10}{7}(1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{20000}) = \frac{19799}{14000} \approx 1,414214. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Offenbar gilt $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Die stetige Funktion f muss daher ein Minimum haben. Wir finden es durch Nullsetzen der Ableitung:

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n 2(x - a_k) = 0 \quad \leftrightarrow \quad nx - \sum_{k=1}^n a_k = 0$$

Also ergibt sich $a = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$; das angegebene Messergebnis ist das arithmetische Mittel aller Messwerte. (Beachte: Das Minimierungsproblem ist eindeutig lösbar.)

Betrachten wir nun noch die Funktion g . O.B.d.A. gelte $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Probiert man ein paar Beispiele aus, kommt man zu folgender Vermutung:

Ist n gerade, so gilt $g(a) = \min\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ genau dann, wenn $a \in [a_{n/2}, a_{1+n/2}]$.

(Hier ist das Minimierungsproblem also nicht eindeutig lösbar.)

Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 2$. Für $x \in [a_1, a_2]$ ist $g(x) = x - a_1 - (x - a_2) = a_2 - a_1$, für $x < a_1$ gilt $g(x) = -(x - a_1) - (x - a_2) = a_1 + a_2 - 2x > a_1 + a_2 - 2a_1 = a_2 - a_1$, und $g(x) > a_2 - a_1$ für $x > a_2$ sieht man ebenso ein.

Induktionsschluss: Für ein gewisses gerades n sei die Behauptung gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{n+2} |x - a_k| = G(x) + H(x), \quad \text{wobei} \quad G(x) := \sum_{k=2}^{n+1} |x - a_k|, \\ &\quad H(x) := |x - a_1| + |x - a_{n+1}|. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung wird G genau auf $[a_{1+n/2}, a_{2+n/2}]$ minimal und laut Induktionsanfang ist H auf $[a_1, a_{n+2}]$ konstant, ansonsten größer. Damit folgt die Behauptung auch für $n+2$.

Völlig analog zeigt man die Aussage für ungerades n :

Ist n ungerade, so gilt $g(a) = \min\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ genau dann, wenn $a = a_{(n+1)/2}$.

Aufgabe 8 a) Dass f auf $[-1, 1]$ ein Maximum hat, folgt aus der Stetigkeit von f . Wir betrachten nun die Ableitungen $f'(x) = x^3 - 3x + 1$ und $f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $f''(x) < 0$, d. h. auf diesem Intervall ist f' streng monoton fallend. Wegen $f'(-1) = 3$ und $f'(1) = -1$ existiert also genau ein $\xi \in (-1, 1)$ mit $f'(\xi) = 0$. (Beachte: f' ist stetig.) Die Funktion f wächst auf $[-1, \xi]$ streng monoton und fällt auf $[\xi, 1]$ streng monoton. Genau in ξ nimmt f also das Maximum an.

b) Wir wollen ξ , also die Nullstelle von $g(x) := f'(x) = x^3 - 3x + 1$, bestimmen. Das Newtonverfahren hat die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = h(x_n), \quad \text{mit} \quad h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 3}.$$

Mit $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = (2 \cdot \frac{1}{27} - 1) / (3 \cdot \frac{1}{9} - 3) = \frac{25}{72}$.

Jetzt zur Fehlerabschätzung und in diesem Zusammenhang zu der Frage: Konvergiert das Newtonverfahren hier überhaupt? Aus der Vorlesung ist bekannt: Gilt für die Funktion $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$ die Abschätzung $|h'(x)| \leq q < 1$ auf $[a, b]$, so konvergiert die durch $x_{n+1} := h(x_n)$ definierte Folge gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt ξ von h , und zwar für jedes $x_0 \in [a, b]$. Zudem gilt dann

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Zunächst müssen wir also ein geeignetes Intervall $[a, b]$ finden. Wir wählen $[0, \frac{1}{2}]$; die Funktion h bildet dieses Intervall in sich ab, denn für $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt $2x^3 - 1 \in [-1, 0]$ und $3x^2 - 3 \in [-3, -2]$, also $h(x) \in [0, \frac{1}{2}]$. Als Ableitung von h erhalten wir

$$h'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{(x^3 - 3x + 1)6x}{(3x^2 - 3)^2}.$$

Wegen $|x^3 - 3x + 1| \leq 1$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ gilt also

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : |h'(x)| \leq \frac{1 \cdot 3}{(\frac{3}{4} - 3)^2} \leq \frac{3}{4} =: q < 1.$$

Wir erhalten daraus die (nicht besonders gute) Abschätzung

$$|\xi - x_2| \leq \frac{q^2}{1 - q} |x_1 - x_0| = \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}.$$

c) Die Gleichung $f'(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ bedeutet $x = \frac{1}{3}(x^3 + 1) =: F(x)$. Die Funktion F erfüllt auf $[0, \frac{2}{3}]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (für $x \in [0, \frac{2}{3}]$ gilt $F(x) \in [0, \frac{2}{3}]$ und $|F'(x)| = x^2 \leq \frac{4}{9} =: q < 1$); also konvergiert die durch $x_{n+1} = F(x_n)$ gegebene Folge für jedes $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$. Aber auch für beliebiges $x_0 \in [-1, 1]$ liegt Konvergenz vor, denn schon x_1 liegt dann wieder in $[0, \frac{2}{3}]$.