

Lösung zum 14. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(*) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \geq 0$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus (*)

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

Aufgabe 2 a) Betrachten wir zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0 . Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \, dx = \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x \, dx \right| = 2.$$

b) Wegen $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ ist $\frac{1}{2} \sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\sin^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

c) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} \Big|_{x=0}^1 = -\frac{1}{4} (\sqrt{5} - \sqrt{9}) = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

d) Wir setzen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ voraus, denn sonst ist die zu integrierende Funktion nicht definiert. Im Falle $a = 1$ ist $\operatorname{Arcsin} x$ eine Stammfunktion des Integranden; für beliebiges $a > 0$ formen wir geeignet um:

$$\begin{aligned} \int_0^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int_0^{a/2} \frac{1}{a\sqrt{1 - (x/a)^2}} dx = \operatorname{Arcsin}(x/a) \Big|_{x=0}^{a/2} \\ &= \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{2}) - \operatorname{Arcsin}(0) = \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

Für $a < 0$ ergibt sich ganz analog der Wert $-\frac{1}{6}\pi$, da man dann einen Faktor $-a$ aus der Wurzel herauszieht.

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $\varphi(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $\varphi'(t) dt = (2\sqrt{t})^{-1} dt$ durch dx . Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = \varphi(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = \varphi(4) = 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x} dx = 2 \ln|1+x| \Big|_{x=1}^2 = 2(\ln(3) - \ln(2)) = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir Produktintegration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^e - \int_1^e f'(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 x^{-1} dx = \frac{1}{2}(e^2 \ln e - \ln 1) - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 \Big|_{x=1}^e\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 a) Die Aufgabe war anders gedacht: Vor dem Integral sollte noch der Faktor x^{-1} stehen. Zu jedem hinreichend kleinen $x \neq 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein ξ zwischen x und $2x$ mit

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+\xi^2} \int_x^{2x} \cos t dt = \frac{1}{1+\xi^2} \sin t \Big|_{t=x}^{2x} = \frac{\sin(2x) - \sin x}{1+\xi^2}.$$

(x muss klein sein, damit $\cos x \geq 0$ zwischen x und $2x$ gilt.) Für $x \rightarrow 0$ gilt auch $\xi \rightarrow 0$ und damit $1 + \xi^2 \rightarrow 1$. Folglich haben wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin(2x)}{2x} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1.$$

(Hieraus folgt insbesondere: Der Grenzwert, der auf dem Übungsblatt stand, also ohne den Faktor x^{-1} , ist 0.)

b) Zu untersuchen ist hier $f(x)/g(x)$ für $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ und $g(x) = x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ (Beachte: für $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq x$ wegen $e^{x^2} \geq 1$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \quad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1} \cdot 2xe^{x^2} = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{(2 - x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 4 Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Beachte: auf Intervallen der Form $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi}]$ wechselt $\sin(x^2)$ nicht das Vorzeichen) existiert eine Zahl ξ_k zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2) dx = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \frac{x \sin(x^2)}{x} dx = \frac{1}{\xi_k} \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x \sin(x^2) dx.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das letzte Integral den Wert $(-1)^k$ hat. Dazu substituieren wir $t = x^2$. Dies liefert $dt = 2x dx$ und damit

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x \sin(x^2) dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{2} \sin(t) dt.$$

Wie wir in der Lösung zu **2 a)** sahen, ergibt dieses Integral tatsächlich den Wert $(-1)^k$.

Aufgabe 5 a) Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir beweisen, dass $\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2) dx$ für $\alpha \rightarrow \infty$ konvergiert. Sei also $\alpha \geq 1$ beliebig. Mit $[\alpha]$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl, die noch $\leq \alpha$ ist. Es ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx + \sum_{k=1}^{[\alpha]-1} \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2) dx + \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2) dx.$$

Die hier auftretende Summe lässt sich gemäß **4** schreiben als

$$\sum_{k=1}^{[\alpha]-1} \frac{(-1)^k}{\xi_k}, \quad \text{mit } \xi_k \text{ zwischen } \sqrt{k\pi} \text{ und } \sqrt{(k+1)\pi}.$$

Die Summe konvergiert also für $\alpha \rightarrow \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch das hintere Integral konvergiert. Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2) dx \right| &\leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} |\sin(x^2)| dx \leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} 1 dx = \sqrt{\alpha\pi} - \sqrt{[\alpha]\pi} \\ &= \frac{\alpha\pi - [\alpha]\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}} \end{aligned}$$

zeigt, dass dieses Integral für $\alpha \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

b) Wir substituieren $t = x^2$. Mit $dt = 2x dx$ erhalten wir

$$\int_0^\beta 2x \sin(x^4) dx = \int_0^{\beta^2} \sin(t^2) dt.$$

Gemäß a) konvergiert dieser Term für $\beta \rightarrow \infty$.

Aufgabe 6 a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3 dx = \frac{1}{8}(1+2x)^4 \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{8}(3^4 - 1^4) = 10.$$

b) Wir verwenden Produktintegration mit $f(t) = \operatorname{Arcsin} t$ und $g'(t) = 1$.

$$\begin{aligned} \int^x \operatorname{Arcsin} t dt &= \int^x 1 \cdot \operatorname{Arcsin} t dt = x \operatorname{Arcsin} x - \int^x t(\operatorname{Arcsin} t)' dt \\ &= x \operatorname{Arcsin} x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Folglich ist jede der Funktionen $F_c(x) = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, eine Stammfunktion des Arcussinus – und es gibt keine weiteren Stammfunktionen.

c) Wieder kommt Produktintegration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin x)^2 dx &= \sin x \cdot (-\cos x) \Big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \cos x \cdot (-\cos x) dx = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (1 - (\sin x)^2) dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2 dx \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2 \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \pi, \quad \text{also} \quad \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\pi.$$

d) Hier substituieren wir $u = e^t$. Dies liefert $du = e^t dt$ und damit

$$\int^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = \int^{e^x} \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=e^x} = \operatorname{Arctan}(e^x).$$

e) Wir substituieren $u = 1 - t$. Dies liefert $du = -dt$, also

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt &= \int^{1-x} \frac{1-u}{\sqrt{u}} (-1) du = \int^{1-x} (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = \frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \Big|_{u=1-x} \\ &= \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}.\end{aligned}$$

f) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d. h. $x = t^2$. Mit $dx = 2t dt$ folgt

$$\int_1^4 \operatorname{Arctan} \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx = \int_1^2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t-1}) \cdot 2t dt;$$

nun substituieren wir erneut: $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u du$,

$$= \int_0^1 \operatorname{Arctan}(u) \cdot 2(u^2 + 1) \cdot 2u du = \int_0^1 (4u^3 + 4u) \operatorname{Arctan} u du.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.)
Dann führen wir eine Produktintegration aus mit $f(u) = \operatorname{Arctan} u$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$\begin{aligned}&= (u^4 + 2u^2) \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 (u^4 + 2u^2) \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 3 \operatorname{Arctan}(1) - \int_0^1 \frac{(u^2 + 1)^2 - 1}{1+u^2} du = \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2 + 1) du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3}u^3 + u\right) \Big|_{u=0}^1 + \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=0}^1 = \frac{3}{4}\pi - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\pi = \pi - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

g) Gemäß Additionstheorem gilt

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2t}{1 - \sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2 \sin t \cos t}{1 - \sin t} dt;$$

daher liefert die Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned}&= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2x}{1-x} dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2(x-1)+2}{1-x} dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} -2 dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{1-x} dx \\ &= -2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) - 2 \ln|1-x| \Big|_{x=1/2}^{\sqrt{3}/2} = 1 - \sqrt{3} - 2\left(\ln\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \sqrt{3} - 2 \ln(2 - \sqrt{3}).\end{aligned}$$

h) Wir betrachten das Polynom unter der Wurzel:

$$2 + 4t - t^2 = -(t-2)^2 + 6 = 6\left(1 - \frac{1}{6}(t-2)^2\right)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+4t-t^2}} dt &= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - (t-2)^2/6}} dt = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{t-2}{\sqrt{6}} \right) \Big|_{t=0}^2 \\ &= \operatorname{Arcsin}(0) - \operatorname{Arcsin}(-2/\sqrt{6}) = \operatorname{Arcsin}(2/\sqrt{6}) = \operatorname{Arcsin}(\tfrac{1}{3}\sqrt{6}).\end{aligned}$$

Aufgabe 7 Berechnen wir zunächst I_0 :

$$I_0 = \int_0^\beta e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_{x=0}^\beta = -e^{-\beta} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta}.$$

Nun sei $n \geq 1$ beliebig. Produktintegration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$I_n = \int_0^\beta x^n e^{-x} dx = x^n (-e^{-x}) \Big|_{x=0}^\beta - \int_0^\beta n x^{n-1} (-e^{-x}) dx = -\beta^n e^{-\beta} + n I_{n-1}.$$

Mit dieser Rekursionsformel berechnen wir einige weitere Integrale:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\beta e^{-\beta} + I_0, \\ I_2 &= -\beta^2 e^{-\beta} + 2I_1 = -e^{-\beta}(\beta^2 + 2\beta) + 2I_0, \\ I_3 &= -\beta^3 e^{-\beta} + 3I_2 = -e^{-\beta}(\beta^3 + 3\beta^2 + 6\beta) + 6I_0 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} I_n &= -e^{-\beta}(\beta^n + n\beta^{n-1} + n(n-1)\beta^{n-2} + \dots + n(n-1)\dots 2\beta) + n! I_0 \\ &= -e^{-\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} + n! I_0 \end{aligned}$$

lautet, und zeigen dies mit vollständiger Induktion: Für $n = 0$ ist die Formel richtig; ist sie für ein $n \geq 0$ bewiesen, so folgt

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -\beta^{n+1} e^{-\beta} + (n+1)I_n = -\beta^{n+1} e^{-\beta} + (n+1) \left(-e^{-\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} + n! I_0 \right) \\ &= -e^{-\beta} \left(\beta^{n+1} + (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} \right) + (n+1)! I_0 \\ &= -e^{-\beta} \left(\beta^{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)!}{(n-(k-1))!} \beta^{n-(k-1)} \right) + (n+1)! I_0 \\ &= -e^{-\beta} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} \beta^{n+1-k} \right) + (n+1)! I_0. \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen, und wir erhalten

$$I_n = -e^{-\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \beta^{n-k} + n! (1 - e^{-\beta}) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} n!$$