

Lösung zum 16. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a) Da in der Gleichung x^{-2} vorkommt, müssen wir $x = 0$ ausschließen. Aus $y = z/x$ folgt $y' = z'/x - z/x^2$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2y' + y^2 + x^{-2} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(z'/x - z/x^2) + (z/x)^2 + x^{-2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2xz' - 2z + z^2 + 1 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2xz' + (z-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' = -\frac{(z-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Offenbar ist $z(x) = 1$ eine Lösung (d.h. $y(x) = 1/x$ ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung); die anderen Lösungen erhalten wir aus

$$\int -\frac{2}{(z-1)^2} dz = \int \frac{1}{x} dx, \quad \text{also} \quad \frac{2}{z-1} = \ln|x| + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Gleichung für z hat also für $z(x) \neq 1$ die allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + \frac{2}{\ln|x| + c} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}),$$

und zwar auf jedem Intervall, das 0 und $\pm e^{-c}$ nicht enthält. Wegen $y = z/x$ liefert dies auf den gleichen Intervallen die folgenden Lösungen der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x \ln|x| + cx} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

b) Es gilt $y' = (x - z)' = 1 - z'$, und somit folgt

$$y' = (x - y)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - z' = z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z' = -z^2.$$

Wieder handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, deren Lösungen wir aus

$$\int -\frac{1}{z^2} dz = \int 1 dx, \quad \text{also} \quad \frac{1}{z} = x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

gewinnen können; die Lösungen sind gegeben durch $z(x) = (x + c)^{-1}$, und zwar auf jedem Intervall, das $-c$ nicht enthält. Hieraus ergibt sich

$$y(x) = x - z(x) = x - \frac{1}{x + c} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

auf ebendiesen Intervallen.

Aufgabe 2 a) Division durch x liefert die Gleichung

$$\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + y' \cos \frac{y}{x} = 0.$$

Dies ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es sich hier anbietet, die Substitution $z = y/x$ durchzuführen. Diese liefert wegen $y' = (xz)' = z + xz'$ die Gleichung

$$\sin z - z \cos z + (z + xz') \cos z = 0, \quad \text{also} \quad \sin z + xz' \cos z = 0.$$

Nun substituieren wir $u(x) := \sin z(x)$. Wegen $u' = z' \cos z$ geht die Gleichung über in

$$u + xu' = 0, \quad \text{also} \quad u' = -\frac{u}{x}.$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$u(x) = C \exp \left(\int^x -\frac{1}{t} dt \right) = C \exp(-\ln|x|) = C|x|^{-1} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Alle Lösungen z erhält man also aus $\sin z(x) = C|x|^{-1}$. Es folgt

$$z(x) = \arcsin_k(C_1/x) \quad (k \in \mathbb{Z}, C_1 \in \mathbb{R})$$

und damit $y(x) = x \arcsin_k(C_1/x)$. Diese Funktionen sind jeweils definiert für $|x| > |C_1|$.

b) Wir betrachten zunächst für $x \neq 0$ die homogene Gleichung

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0, \quad \text{also} \quad y' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) y = 0.$$

Diese besitzt die Lösungen

$$y(x) = C \exp \left(- \int^x \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t} \right) dt \right) = C \exp(x^{-2} + 3 \ln|x|) = C|x|^3 e^{1/x^2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Also: $y(x) = C_1 x^3 e^{1/x^2}$ (mit $C_1 \in \mathbb{R}$ beliebig) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, und zwar auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p(x) = C(x)y_h(x)$, wobei $y_h(x) := x^3 e^{1/x^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^3 y_p' + (2 - 3x^2)y_p &= x^3(C'y_h + Cy_h') + (2 - 3x^2)Cy_h \\ &= x^3 C'y_h + (x^3 y_h' + (2 - 3x^2)y_h)C = x^3 C'y_h. \end{aligned}$$

(Beachte: y_h löst die homogene Gleichung.) Damit y_p die inhomogene Gleichung löst, muss also $x^3 C'y_h = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_h(x) = x^{-3} e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist für $C(x) = \frac{1}{2} e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich die partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{1}{2} x^3$. Insgesamt: Auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält, ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2} x^3 + C x^3 e^{1/x^2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: $x \mapsto \frac{1}{2} x^3$ ist sogar auf ganz $\mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung; andere Lösungen gibt es auf Intervallen, die 0 enthalten, aber nicht.

Aufgabe 3 Die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

bringen wir zunächst auf die Form

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{p(x)}{y^{\alpha-1}} = q(x).$$

Substituieren wir $u = y^{1-\alpha}$, so geht die Gleichung wegen $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ über in

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x),$$

d. h. in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für u .

Bei der konkret gegebenen Gleichung setzen wir daher $u = y^{-2}$ und erhalten

$$-\frac{1}{2}u' + (\tanh x)u + \frac{1}{2}\cosh^2 x = 0.$$

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung $u' = 2(\tanh x)u$. Sie hat die Lösungen

$$u(x) = C \exp\left(\int^x 2 \tanh t \, dt\right) = C \exp(2 \ln \cosh x) = C \cosh^2 x \quad (C \in \mathbb{R})$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $u_p(x) = C(x)u_h(x)$ mit $u_h(x) = \cosh^2 x$. Dann folgt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u_p' + (\tanh x)u_p + \frac{1}{2}\cosh^2 x &= -\frac{1}{2}(C'u_h + Cu_h') + (\tanh x)Cu_h + \frac{1}{2}\cosh^2 x \\ &= -\frac{1}{2}C'u_h + \left(-\frac{1}{2}u_p' + (\tanh x)u_p\right)C + \frac{1}{2}\cosh^2 x = \frac{1}{2}(-C' + 1)\cosh^2 x. \end{aligned}$$

Dies ist $= 0$, wenn $C' = 1$ gilt. Wir wählen daher $C(x) = x$, also $u_p(x) = x \cosh^2 x$, und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$u(x) = u_p(x) + C \cosh^2 x = (x + C) \cosh^2 x$$

Die Bedingung $y(0) = 1$ bedeutet $u(0) = 1^{-2} = 1$ und hieraus folgt $C = 1$. Die Lösung $u(x) = (x + 1) \cosh^2 x$ liefert uns

$$y(x) = (u(x))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x+1} \cosh x}.$$

Aufgabe 4 a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass man die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung sofort in der Hand hat, wenn man die Nullstellen des zugehörigen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 3$ kennt; dies sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$. Folglich hat die vorliegende Gleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Dann ist $y(0) = C_2$ und wegen

$$y'(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}x) + C_1 e^x \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}x) - C_2 e^x \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x)$$

gilt $y'(0) = \sqrt{2}C_1 + C_2$. Die Bedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ implizieren daher $C_2 = 1$ und $C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Lösung lautet mithin

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^x \sin(\sqrt{2}x) + e^x \cos(\sqrt{2}x).$$

b) Das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ hat die Nullstellen 1 und 4. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet folglich

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p(x) = Ce^{2x}$. Dann ist $y'_p = 2Ce^{2x}$ und $y''_p = 4Ce^{2x}$, also

$$y''_p - 5y'_p + 4y_p = 4Ce^{2x} - 10Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = -2Ce^{2x}.$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die Lösung lautet daher

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Aufgabe 5 Als erstes lösen wir die homogene Gleichung. Da das Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ hat, lautet die (komplexe) Lösung der homogenen Gleichung

$$y(x) = C_1e^{(1+2i)x} + C_2e^{(1-2i)x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir jetzt den Ansatz $y_p(x) = u(x)y_h(x)$ mit $y_h(x) := e^{(1+2i)x}$. Dann ergibt sich

$$y'_p = u'y_h + uy'_h, \quad y''_p = u''y_h + 2u'y'_h + uy''_h,$$

und damit

$$\begin{aligned} y''_p - 2y'_p + 5y &= u''y_h + 2u'y'_h + uy''_h - 2(u'y_h + uy'_h) + 5uy_h \\ &= u''y_h + u'(2y'_h - 2y_h) + u(y''_h - 2y'_h + 5y_h) = u''y_h + 2u'(y'_h - y_h). \end{aligned}$$

Nun ist $y'_h - y_h = (1+2i)y_h - y_h = 2iy_h$. Damit y_p eine Lösung ist, muss $u'' + 4iu' = -4$ gelten. Dies trifft etwa für $u(x) = ix$ zu. Dann ist $y_p(x) = ix e^{(1+2i)x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = ix e^{(1+2i)x} + C_1e^{(1+2i)x} + C_2e^{(1-2i)x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

Die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung ist der Realteil der rechten Seite der komplexen Gleichung. Also müssen wir den Realteil nehmen, um die allgemeine (reelle) Lösung der ursprünglichen Gleichung zu bekommen:

$$y(x) = -xe^x \sin(2x) + ae^x \sin(2x) + be^x \cos(2x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 6 Diese Differentialgleichung vom Eulerschen Typ behandeln wir auf $(0, \infty)$, indem wir die neue unabhängige Variable $t = \ln x$ einführen. (Wir wählen $(0, \infty)$, weil y und y' an der Stelle 1 vorgegeben sind.) Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) - y(e^t) = t.$$

Setzen wir jetzt $z(t) := y(e^t)$, so haben wir $\dot{z}(t) = e^ty'(e^t)$ und $\ddot{z}(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$. Unsere Gleichung schreibt sich somit

$$\ddot{z}(t) - z(t) = t.$$

Da $\lambda^2 - 1$ die Nullstellen 1 und -1 hat, lautet die allgemeine Lösung von $\ddot{z} - z = 0$

$$z(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen wir mit dem Ansatz $z_p(t) = at + b$. Dann ist $\ddot{z}_p - z_p = -z_p = -at - b$. Eine Lösung ergibt sich also für $a = -1$ und $b = 0$; es ist $z_p(t) = -t$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$z(t) = -t + C_1e^t + C_2e^{-t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = z(\ln x) = -\ln x + C_1x + C_2x^{-1} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Es gilt $y'(x) = -x^{-1} + C_1 - C_2x^{-2}$. Die Bedingungen $y(1) = 2$ und $y'(1) = -1$ bedeuten $C_1 + C_2 = 2$ und $-1 + C_1 - C_2 = -1$, also $C_1 = C_2 = 1$. Die Lösung der Aufgabe ist

$$y(x) = -\ln x + x + x^{-1}.$$

Bemerkung: Man könnte auch mit dem Ansatz $y(x) = x^r$ in die Differentialgleichung eingehen, um die Lösungen der homogenen Gleichung zu finden.

Aufgabe 7 Es bezeichne $x(t)$ die Auslenkung der Masse (bezüglich der Ruhelage) zum Zeitpunkt t . Die Rückstellkraft der Feder ist gegeben durch $-Dx(t)$ mit einer positiven Konstante D . Bei ungedämpfter Schwingung würde also nach dem Newtonschen Kraftgesetz

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t)$$

gelten. Da jedoch eine Dämpfungskraft $-r\dot{x}(t)$ (wobei $r > 0$) hinzukommt, müssen wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - r\dot{x}(t)$$

betrachten. Setzen wir $a := r/2m$ und $b := D/m$, so haben wir die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$

vor uns. Aus der Vorlesung sind die Lösungen bekannt:

1. Fall: $a^2 > b$, also $r > 2\sqrt{mD}$ (*starke Dämpfung*). Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t} + C_2e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

d. h. sie hat die Gestalt $x(t) = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t}$ mit positiven Konstanten δ_1 und δ_2 . Offenbar gilt $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, die Schwingung wird also immer schwächer. Weiter haben wir: $x(t) = 0$ ist (wenn o.B.d.A. $C_1 \neq 0$) gleichbedeutend mit $e^{(\delta_2 - \delta_1)t} = -C_2/C_1$. Dies kann wegen $\delta_1 \neq \delta_2$ für höchstens ein t erfüllt sein. Bei dieser trägt „Schwingung“ wird die Ruhelage also höchstens einmal durchquert.

2. Fall: $a^2 = b$, also $r = 2\sqrt{mD}$ (ebenfalls *starke Dämpfung*). Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at} = (C_1 + C_2 t) e^{-at} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Auch hier zeigt sich das gleiche Verhalten wie im ersten Fall: $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ und $x(t) = 0$ gilt für höchstens ein t (nämlich $t = -C_1/C_2$).

3. Fall: $a^2 < b$, also $r < 2\sqrt{mD}$ (*schwache Dämpfung*). Dann ist

$$x(t) = C_1 e^{-at} \cos(\sqrt{b - a^2} t) + C_2 e^{-at} \sin(\sqrt{b - a^2} t) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Im nichttrivialen Fall (also $A := (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \neq 0$) schreiben wir dies noch um: Wegen $(C_1/A)^2 + (C_2/A)^2 = 1$ gibt es dann ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $(C_2/A) + i(C_1/A) = e^{i\varphi}$. Das bedeutet $C_2/A = \cos \varphi$ und $C_1/A = \sin \varphi$, also

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-at} \left(\frac{C_1}{A} \cos(\sqrt{b - a^2} t) + \frac{C_2}{A} \sin(\sqrt{b - a^2} t) \right) \\ &= A e^{-at} \left(\sin \varphi \cos(\sqrt{b - a^2} t) + \cos \varphi \sin(\sqrt{b - a^2} t) \right) = A e^{-at} \sin(\varphi + \sqrt{b - a^2} t). \end{aligned}$$

Hier haben wir nun eine wirkliche „Schwingung“; sie wird zwar auch immer schwächer, die schwingende Masse durchquert dabei aber immer wieder die Ruhelage.

Die Konstanten können jeweils noch benutzt werden, um die vorgegebene Anfangsauslenkung und Geschwindigkeit zu berücksichtigen.

Aufgabe 8 Es sei $U(x) := \int_{x_0}^x u(t) dt$. (U ist also eine Stammfunktion von u .) Die Differentialgleichung besagt dann gerade, dass die Ableitung von

$$u'(x) + 2au(x) + bU(x)$$

verschwindet; diese Funktion ist also konstant. Wegen $u'(x_0) = u(x_0) = U(x_0) = 0$ ist sie konstant = 0. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0}^x (u'(t) + 2au(t) + bU(t)) dt = u(t) \Big|_{t=x_0}^x + 2aU(x) + b \int_{x_0}^x 1 \cdot U(t) dt \\ &= u(x) - u(x_0) + 2aU(x) + b \left(tU(t) \Big|_{t=x_0}^x - \int_{x_0}^x tU'(t) dt \right) \\ &= u(x) + 2aU(x) + b \left(xU(x) - x_0U(x_0) - \int_{x_0}^x tu(t) dt \right) \\ &= u(x) + 2aU(x) + bxU(x) - \int_{x_0}^x btu(t) dt = u(x) + \int_{x_0}^x (2a + bx - bt)u(t) dt, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich die behauptete Darstellung mit $k(x, t) = -2a - bx + bt$.

Aufgabe 9 a) Die Differentialgleichung führt zu dem Polynom $\lambda^2 + 1$. Dieses hat die Nullstellen i und $-i$. Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Da hier $y(0) = C_2$ und $y(\pi) = -C_2$ gilt, können die Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 1$ nicht erfüllt werden; das Randwertproblem hat folglich keine Lösung.

b) Wir haben hier die gleiche allgemeine Lösung wie in a). Die Randbedingungen besagen diesmal jedoch beide $C_2 = 1$. Damit folgt: Alle Funktionen

$$y(x) = C \sin(x) + \cos(x) \quad (C \in \mathbb{R})$$

sind Lösungen des Randwertproblems.

c) Das Polynom $\lambda^2 - 1$ hat die Nullstellen 1 und -1 . Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = ae^x + be^{-x} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Es ist $y(0) = a + b$ und $y'(0) = ae + be^{-1}$. Die zwei Randbedingungen liefern somit die Gleichungen $a + b = 1$ und $ae + be^{-1} = 2$. Wir ziehen das e -fache der ersten von der zweiten Gleichung ab: $be^{-1} - be = 2 - e$. Es folgt

$$b = \frac{2 - e}{e^{-1} - e} = \frac{e(e - 2)}{e^2 - 1}, \quad \text{und damit} \quad a = 1 - b = \frac{2e - 1}{e^2 - 1}.$$

Dieses Randwertproblem hat also genau eine Lösung, nämlich

$$y(x) = \frac{(2e - 1)e^x + e(e - 2)e^{-x}}{e^2 - 1}.$$