UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
J. Bitzer

08.12.2001
– WS 2001/2002 –

1. Übungsklausur zur HM I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1. Aufgabe (10 Punkte):

Skizzieren Sie folgende Mengen in einem kartesischen (x, y)-Koordinatensystem:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \leq 2|x| + 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y - 2| \leq |x| \quad \wedge \quad |y - 2| < 1\}$

Begründen Sie Ihr Vorgehen.

2. Aufgabe (10 Punkte):

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der komplexen Zahl $\dfrac{16 + 4i}{3 + 5i}$.
Berechnen Sie anschließend die Beträge und Argumente aller Lösungen von

$$w^3 = \frac{16 + 4i}{3 + 5i} \quad .$$

b) Gegeben ist die komplexe Zahl $z_0 = 2 - 2i$. Daraus werden zwei weitere komplexe Zahlen z_1 und z_2 abgeleitet: z_1 ergibt sich durch Drehung von z_0 um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ im mathematisch positiven Sinn um den Ursprung, und z_2 ist durch die Gleichung $z_2 = i\sqrt{2}\left(\dfrac{4}{z_0}\right)^2$ festgelegt. Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von z_1 und z_2.

c) Zeigen Sie, daß z_0, z_1, z_2 die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind, und bestimmen Sie die Seitenlängen sowie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

– bitte wenden –

3. Aufgabe (10 Punkte):

Durch die Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{p}_{4,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2\alpha - 1 \\ 2\alpha^2 - 2 \\ -\alpha^2 + 2\alpha + 1 \end{pmatrix}$$

sind die Punkte P_1, P_2, P_3 und $P_{4,\alpha}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß die vier Punkte in einer Ebene liegen.

b) Mit g_1 sei die Gerade durch P_1 und P_2 und mit $g_{2,\alpha}$ die Gerade durch P_3 und $P_{4,\alpha}$ bezeichnet.
Sei nun zunächst $\alpha = 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, in der g_1 und $g_{2,1}$ liegen, in Hessescher Normalform.

c) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Abstand zwischen g_1 und $g_{2,\alpha}$ am geringsten? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie den Wert dieses Abstandes an.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Die durch

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{3}{4 - x_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

rekursiv definierte Folge (x_n) ist auf Konvergenz zu untersuchen. Hierzu ist hinsichtlich Monotonie und Beschränktheit der Folge jeweils eine Vermutung zu formulieren und zu beweisen.
Falls die Folge konvergiert, ist der Grenzwert zu berechnen.

Viel Erfolg!

Hinweis: Die korrigierten 1. Übungsklausuren können ab **Dienstag, dem 18.12.01**, im Sekretariat, Zimmer 312, abgeholt werden. Fragen zur Korrektur der 1. Übungsklausur können am **Donnerstag, dem 20.12.01, um 13.15 Uhr im Raum S 31** an die zuständigen Tutoren gestellt werden.