

1. Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen $x_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) mit $x_j \geq 0$ und $\sum_{k=1}^n x_k < 1$ gilt

$$\prod_{j=1}^n (1 + x_j) \leq \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^n x_j}.$$

Überprüfen Sie die Ungleichung zunächst für $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - x| \leq x \text{ und } |y - 2| < 1\}$. Berechnen Sie alle Punkte (x, y) aus M und skizzieren Sie M in der (x, y) -Ebene.
- b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die

$$\frac{1 + |x|}{1 + |y|} \leq 1 + |x - y|$$

gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie den Betrag, sowie Real- und Imaginärteil von

$$z = \sum_{k=1}^{26} (1 + i)^k.$$

- b) Geben Sie in komplexer Form alle Punkte der Geraden g durch

$$z_1 = -1 - i \quad \text{und} \quad z_2 = 2 + 2i$$

an. Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{i}{1 + i} z$$

gegeben. Berechnen Sie alle Punkte des Bildes der Geraden g unter dieser Abbildung f . Beschreiben Sie dieses Bild geometrisch.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es seien der Punkt $P = (-2, 3, 0)$ sowie die Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren von g und h aufeinander senkrecht stehen, die Geraden g und h aber windschief sind. Überprüfen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.
- b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , die den Punkt P und die Gerade g enthält. Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?
- c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von Ebene E und Gerade h . Berechnen Sie den Winkel φ zwischen der Geraden h und der Lotgeraden l der Ebene E im Punkt S .
- d) Berechnen Sie den Winkel ψ zwischen der Geraden h und der Ebene E .

Nach der Klausur. Die korrigierten Übungsklausuren können ab **14.12. (Dienstag)** im Sekretariat (Zi. 312) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **16.12. (Donnerstag)** von **13.15 Uhr** bis **13.45 Uhr** im Seminarraum S31 möglich.