

Aufgabe 1

a) Die Folge (a_n) ist beschränkt (11)

Man sieht sofort $a_n > 1 \quad \forall n \rightarrow \frac{a_n}{1+a_n} \leq 1$

Rek. Formel
 $\rightarrow \quad \underline{1 \leq a_n \leq 2} \quad \forall n$

Die Folge (a_n) ist $\uparrow$ (12)

Zu zeigen $\underline{a_n < a_{n+1}}$, $n = 1, 2, \dots$

Induktion: $\underline{n=1}$ ($a_1=1$): $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 = a_1 \quad \checkmark$

Schluss von $n-1$ auf n :

Es gelte also für ein $n \geq 2$: $a_{n-1} < a_n$. (IV)

Es ist zu zeigen: $a_n < a_{n+1}$.

Gemäß der Rekursionsformel gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\underbrace{(1+a_n)(1+a_{n-1})}_{>0}} \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{>0 \text{ (IV)}} > 0 \quad \checkmark$$

Nach Satz der Vorlesung ist die Folge (a_n) wegen (1) und (2) konvergent.

b) Wegen der Rekursionsformel gilt für den Grenzwert g :

$$g = 1 + \frac{g}{1+g} \quad \Leftrightarrow \quad g^2 - g - 1 = 0$$

$$\rightarrow \quad g = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5})$$

Wegen $a_n > 1 \quad \forall n$ gilt $g \geq 1$, also:

$$\underline{g = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})}$$

Aufgabe 2

Es ist zu untersuchen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} \right)$.

1) Es gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{1}{6}$, wegen

$$\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \leq \sqrt[k]{a_k} \leq \sqrt[k]{2} \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

und wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ (Vorlesung!).

Also ist der Konvergenzradius $r = 6$, d.h. es liegt für $|x| < 6$ Konvergenz und für $|x| > 6$ Divergenz vor.

2) $x = 6$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 6^k$ ist divergent, da diese Reihe

wegen $a_k 6^k = \left(1 + \left(\frac{6}{7}\right)^k\right) / k \geq \frac{1}{k}$ die divergente

Minorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hat.

$x = -6$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-6)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ mit

$$c_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{6}{7}\right)^k. \quad \text{Es gelten (das sieht man sofort)}$$

$$c_k > 0, \quad c_k > c_{k+1} \quad \text{für alle } k \quad \text{und}$$

$$c_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit sind die Vor. des Leibniz-Kriteriums erfüllt.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ ist konvergent.

Ergebnis: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ist genau für x : $-6 \leq x < 6$

konvergent.

Aufgabe 3a) $\beta = 0$ ist nicht möglich.

$$I = \left(-\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{\pi}{|\beta|}\right)$$

 $\beta \neq 0$: f ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf $I \setminus \{0\}$ stetig. f ist auf I stetig, falls α, β, f so gewählt sind, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = f \quad \text{gilt.}$$

Mit $\sin \beta x = \beta x - \frac{1}{3!} \beta^3 x^3 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$ hat man

$$f(x) = \frac{\alpha \sin \beta x - x}{x \sin \beta x} = \frac{x(\alpha \beta - 1) - \frac{1}{3!} \alpha \beta^3 x^3 + o(x^4)}{\beta x^2 - \frac{1}{3!} \beta^3 x^4 + o(x^5)}$$

 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nur, falls $\alpha \beta = 1$. In diesem Fall

$$\text{ist } f(x) = -\frac{1}{3!} \alpha \beta^2 x + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{I})$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f$$

 f ist auf I stetig, falls $f=0$ und $\alpha \beta = 1$ gelten.

$$b) \quad f'(0) = (\text{falls existent}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f(x) - f(0))$$

Mit $f(0) = 0$ und (I) aus a) erhält man:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f(x) - f(0)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3!} \alpha \beta^2 x + o(x^2)\right) \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{3!} \alpha \beta^2 = -\frac{1}{6} \beta = f'(0)$$

 $f'(0)$ existiert, falls $\alpha \beta = 1, f=0$. Es gilt $f'(0) = -\frac{1}{6} \beta$.

Aufgabe 4

$$a) \quad g(x) := \sin x - x \cos x$$

$$g(0) = 0, \quad g(\pi) = \pi$$

$$g'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x > 0 \quad \text{für } 0 < x < \pi$$

D.h.: g ist streng $\uparrow$ auf $[0, \pi]$: Also gilt

$$\text{für } 0 < x \leq \pi : \quad \underline{g(x) > g(0) = 0} \quad \checkmark$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x}{\sin x}, \quad 0 < x < \pi \quad \text{f ist stetig}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \infty \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} > 0 \quad (\text{nach a}), \quad 0 < x < \pi \quad (2)$$

f' ist stetig, f ist auf $(0, \pi)$ streng $\uparrow$.

Nut (1) folgt: $f: (0, \pi) \rightarrow (1, \infty)$ bijektiv, stetig diff'bar

Somit existiert $\underline{f^{-1}: (1, \infty) \rightarrow (0, \pi)}$ als stetig diff'bare

Funktion.

$$\text{Es gilt} \quad \underline{(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}}, \quad t \in (1, \infty) \quad (3)$$

Es ist $t = \frac{\pi}{2} \in (1, \infty)$. Wegen $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ gilt $f^{-1}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Aus (2) sieht man $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 = f'(f^{-1}(\frac{\pi}{2}))$. Also

$$\text{gilt (3):} \quad \underline{(f^{-1})'(\frac{\pi}{2}) = 1}$$