2. Übungsklausur

Aufgabe 1

a)

Sei $\beta \neq 0$.

Nullstellen:

$$f_\beta(x) = 0 \iff \frac{\beta^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff x = 0$$

Extremstellen:

notwendige Bedingung: $f_\beta'(x) = 0$

$$f_\beta'(x) = \frac{\beta^2 \sqrt{1+x^2} - \beta^2 x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\beta^2(1+x^2) - \beta^2 x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\beta^2}{(1+x^2)^{3/2}} \neq 0$$

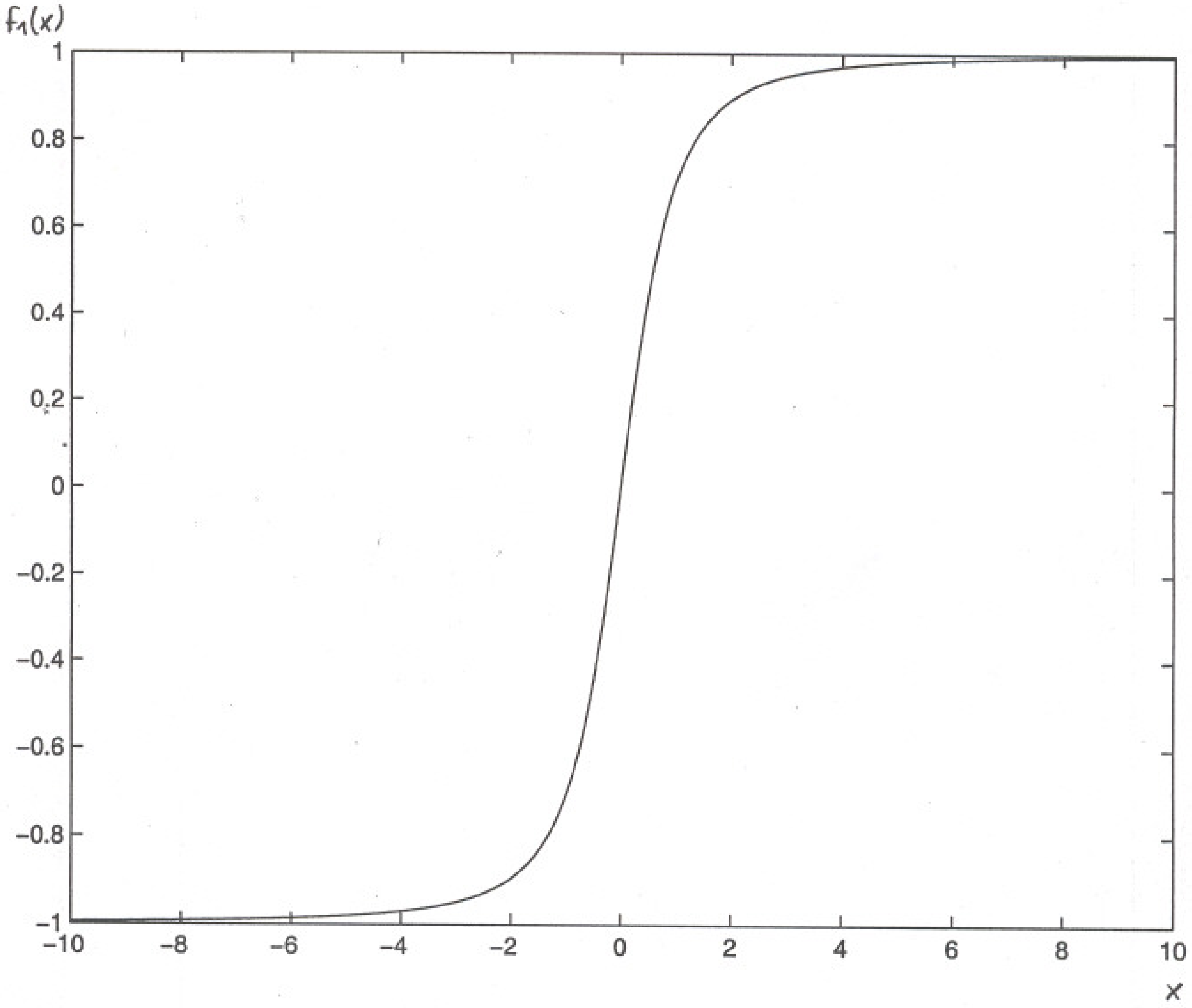
Es gibt also keine Extremstellen.

Sei $\beta = 0$.

$f_0 \equiv 0$

Also ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Nullstelle und Extremstelle.

1c)



1b)

Für $x \neq 0$ ist $\frac{\beta^2 x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\beta^2 x}{|x| \sqrt{x^{-2}+1}}$.

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f_\beta(x) = -\beta^2$,

$\lim_{x \to +\infty} f_\beta(x) = \beta^2$.

1d)

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|f_\beta(x)| < 1$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$(|\beta| \leq 1$ und $x \in \mathbb{R})$

oder $\left(|\beta| > 1 \text{ und } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{\beta^4 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{\beta^4-1}}\right[\right)$.

Denn

$$\left| \frac{\beta^2 x}{\sqrt{1+x^2}} \right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta^2 x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 x^2 < 1 + x^2$$

$$\Leftrightarrow (\beta^4 - 1) x^2 < 1.$$

Aufgabe 2

a)

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x - \cos(x)} = 0$

ii) $\frac{\arctan(x)}{6 + \cos(4x)}$ konvergiert nicht für $x \to \infty$.

Denn $\cos(4x)$ oszilliert zwischen -1 und 1 und $\arctan(x)$ konvergiert nicht gegen 0 für $x \to \infty$.

iii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^9 - x^8}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{9x^8 - 8x^7}{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$

b)

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|\lambda| < 1$ ist.

Denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k .$$

Aufgabe 3

a)

Für jeden möglichen Limes $x^* \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$

$$= x^* - \frac{(x^*)^3 - 1}{3(x^*)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^*)^3 - 1}{3(x^*)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = 1$$

b)

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 1}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x^2}$$

$$\Rightarrow g(1) = 1$$

$$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^3} \quad \Rightarrow \quad g'(1) = 0$$

$$g''(x) = \frac{2}{x^4} \quad \Rightarrow \quad g''(1) = 2$$

Also $T_2(x, 1) = 1 + (x-1)^2$.

3c)

$$h_{n+1} = 1 + (1 + h_n - 1)^2 - 1 = h_n^2$$

Konvergenz liegt genau dann vor, wenn

$h_0 \in [-1, 1]$.

Es gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} h_n = \begin{cases} 0 & , \text{falls } |h_0| < 1 \\ 1 & , \text{falls } |h_0| = 1 \end{cases}$$

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1+x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

5!	1	−1	1/5	1/5!	0
					X

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

6!	2	1	1/6!	0	−1/2
					X

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

0	∞	1/3	1	3	3!
			X		

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\,. \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

0	∞	1/2	1	2	3
			X		

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} x^k\,.$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$]-\infty,0]$	$[0,\infty[$	$[-1,1]$	$[-1,1[$	$]-1,1]$	$]-1,1[$
				X	

ist.

Viel Erfolg!

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1+x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

0	1/5!	1/5	1	−1	5!
X					

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

−1/2	0	1/6!	1	2	6!
X					

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

1/3	1	3	3!	∞	0
	X				

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

1/2	1	2	3	∞	0
	X				

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} x^k\ .$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$[-1,1]$	$[-1,1[$	$]-1,1]$	$]-1,1[$	$]-\infty,0]$	$[0,\infty[$
		X			

ist.

Viel Erfolg!

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1 + x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

$5!$	$1/5!$	1	$1/5$	0	-1
				X	

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

$6!$	$1/6!$	1	$-1/2$	0	2
			X		

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

0	$1/3$	1	3	$3!$	∞
		X			

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \dfrac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \dfrac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

0	$1/2$	1	2	3	∞
		X			

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, x^k\ .$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$]-\infty, 0]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1[$	$]-1, 1]$	$]-1, 1[$	$[0, \infty[$
			X		

ist.

Viel Erfolg!

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Multiple choice aufgabe:

– Es ist immer **nur** eine Lösung richtig.
– 2 Kreuze bei einer Teilaufgabe bedeuten bei dieser Teilaufgabe immer **0** Punkte.

a) Betrachte die Taylorreihe von

$$f(x) = \ell n(1+x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

i) Der Koeffizient a_5 ist gleich

-1	0	$1/5$	1	$1/5!$	$5!$
	X				

ii) Der Koeffizient a_6 ist gleich

2	0	$-1/2$	1	$1/6!$	$6!$
		X			

iii) Der Konvergenzradius ist gleich

∞	$3!$	3	1	$1/3$	0
			X		

b) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls} \quad k = 3m,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{3}{k}, & \text{falls} \quad k = 3m+1,\ m \in \mathbb{N}\ . \\ \frac{1}{2^k}, & \text{falls} \quad k = 3m+2,\ m \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Der Konvergenzradius beträgt

∞	3	2	1	$1/2$	0
			X		

c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} x^k\ .$$

Die Taylorreihe der Ableitung $f'(x)$ um $x = 0$ konvergiert genau dann, wenn x aus dem Intervall

$[0, \infty[$	$]-1, 1[$	$]-1, 1]$	$[-1, 1[$	$[-1, 1]$	$]-\infty, 0]$
		X			

ist.

Viel Erfolg!