UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2008/09
31.01.2009

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{\sinh(x^2)}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(\cos x)}$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)^n .$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3}\, x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$.

i) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ besitzt, indem Sie begründen, dass f injektiv ist, und das Bild $f(\mathbb{R})$ von f angeben.

ii) Bestimmen Sie $f^{-1}(1)$ und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt

$$\bigl|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)\bigr| \leqslant \sqrt{3}\,|x-y|\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2}\, dx$

ii) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\, dx$

b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx \,.$$

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $[0, 2]$ liegt.

Hinweis: Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt $|\sin(x)| \leqslant x$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die

$$|z - \overline{z}| \leqslant 4 \qquad \text{und} \qquad z\,\overline{z} + 2\ \mathrm{Im}(z) < 3$$

erfüllen, und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)^9 .$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln\bigl(1 + 1/k\bigr) \,.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **10.02.2009**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **12.02.2009**, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Gebäude 20.30) möglich.