Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

WS 2018/19
02.02.2019

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 6 + 10 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob der folgende Grenzwerte existiert, und berechnen Sie ihn gegebenenfalls

$$\lim_{x\to 1-} \tan(\frac{\pi}{2}x) \cdot \ln x.$$

b) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^9 .$$

c) Gegeben sei die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3}(z-i)^n,$$

wobei

$$b_n = (1+i+(-1)^n)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}\right)^n .$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius und bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die diese Reihe konvergiert. Skizieren Sie die Menge aller dieser z.

Aufgabe 2 (10 + 10 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$.

i) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist. Bestimmen Sie Bild f . Besitzt f eine Umkehrfunktion?

ii) Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$, und bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}([-\pi, 1])$.
Hinweis: Beachten Sie, dass $f(0) = 1$.

b) **i)** Zeigen Sie mit Hilfe des Taylorsatzes, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\sin(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!}.$$

ii) Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich so dass $\left|\sin(1) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right| <$ $0,001$. Warum kann eine solche Fragestellung Anwendungen haben?

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (4 + (8 + 4 + 4) Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Menge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\}$ ein Unterraum von R^3 ist und bestimmen Sie eine Basis von A.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- **i)** Mittels Zeilenumforungen Berechnen Sie die Inverse von A.
- **ii)** Mit Hilfe der Zeilenumformungen, die Sie im Teil (i) verwenden haben, bestimmen Sie die $\det(A)$. Begründen Sie Ihre Antwort.
- **iii)** Bestimmen Sie die Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{e_2}$.

Aufgabe 4 ((4 + 4) + 6 + 6 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- **i)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2}\, dx$
- **ii)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\, dx$

b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f : [-3, 3] \to \mathbb{R},\ x \to e^x(x^2 + x - 11)\,.$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\ln(n + 1) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\,.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Montag, den **03.02.2019**, bei den Tutoren abgeholt werden.