

**Übungsklausur**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung**  
**Elektrotechnik und Informationstechnik**

**Lösungsvorschläge**

**Aufgabe 1**

a) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \ln x = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

b) Um den Real- und Imaginärteil von  $z := \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^9$  zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Polarkoordinaten von  $y := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ . Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|y| = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1.$$

Für das Argument  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  von  $y$  muss gelten

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \text{also} \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

Dies ist genau für  $\varphi = \frac{1}{6}\pi$  erfüllt. Also gilt  $y = e^{i\pi/6}$  und es folgt

$$z = y^9 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

Damit lauten  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -1$ .

## Aufgabe 2

- a) i) Die durch  $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$  definierte Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$f'(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Also ist  $f$  streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen  $f(x) > -\frac{\pi}{2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  sowie der Stetigkeit von  $f$  folgt aus dem Zwischenwertsatz:  $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ . Damit besitzt die bijektive Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \infty)$  die Umkehrfunktion  $f^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- ii) Wegen  $f(0) = 1$  ist  $f^{-1}(1) = 0$ . Da  $f'(0) = 4 \neq 0$  ist  $f^{-1}$  nach dem Satz über die Umkehrfunktion in  $f(0) = 1$  differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

Es gilt  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$  und  $f(0) = 1$ . Wegen Monotonie kann die Funktion  $f$  die Werte in dem Intervall  $[-\pi, 1]$  genau dann annehmen, wenn  $x \in (-\infty, 0]$  ist. Also gilt  $f^{-1}([-\pi, 1]) = (-\infty, 0]$ .

## Aufgabe 4

- a) i) Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot (x e^{-x^2}) dx = \left[ x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) \right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) dx \\ &= -\frac{2}{2} e^{-2} + \int_0^{\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx = -e^{-2} + \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- ii) Es gilt nach der Substitution  $y = \cos x$

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(x)) \sin x dx = \int_1^{-1} (-1)(1-y^2) dy = \left[ \frac{y^3}{3} - y \right]_1^{-1} = \frac{4}{3}$$

- b) Die Funktion  $f$  ist auf dem Intervall  $[-3, 3]$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^x(x^2 + x - 11) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x - 10) = e^x(x + 5)(x - 2).$$

Die Ableitung der Funktion  $f$  hat innerhalb des Intervalls  $(-3, 3)$  nur eine Nullstelle  $x = 2$ . Der Punkt  $x = -5$  liegt nicht auf dem Intervall  $[-3, 3]$ .

Wir berechnen die Werte von  $f$  an den Stellen  $x = -3$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  und bekommen, dass  $f_{\max} = f(3) = e^3$  und  $f_{\min} = f(2) = -5e^2$ .

- c) Um

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu zeigen, verwenden wir vollständige Induktion.

IA:  $n = 1$ . Es ist  $\ln(1+1) = \sum_{k=1}^1 \ln(1 + 1/k)$ .

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Es gelte  $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k)$  (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \ln(1 + 1/k) &= \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k) + \ln(1 + 1/(n+1)) \stackrel{\text{(IV)}}{=} \ln(n+1) + \ln(1 + 1/(n+1)) \\ &= \ln((n+1) \cdot (1 + 1/(n+1))) = \ln((n+1) + 1). \end{aligned}$$