

**Übungsklausur**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung**  
**Elektrotechnik und Informationstechnik**

**Aufgabe 1 (20 Punkte)**

- a) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3 + n \log n} - n^{\frac{3}{2}}),$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1 - x),$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(\cos x)}.$

- b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$b_n := \left( \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right)^n.$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$$

und bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die diese Reihe konvergent ist.

**Aufgabe 2 (20 Punkte)**

- a) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$ .
- i) Zeigen Sie, dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, indem Sie begründen, dass  $f$  injektiv ist, und das Bild  $f(\mathbb{R})$  von  $f$  angeben.
- ii) Bestimmen Sie  $f^{-1}(1)$  und berechnen Sie  $(f^{-1})'(1)$ .
- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle  $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$  gilt

$$|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)| \leq \sqrt{3} |x - y|.$$

### Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i)  $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2} dx$

ii)  $\int_0^{\pi} e^x \cos(2x) dx$

b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k).$$

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in  $[0, 2]$  liegt.

*Hinweis:* Für jedes  $x \in [0, 1]$  gilt  $|\sin(x)| \leq x$ .

### Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Betrachten Sie die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $\text{Kern}(A)$  und alle Lösungen des Systems  $A\vec{x} = \vec{b}$  für  $\vec{b} = (9, 20, -3)^T$ .

b) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil von

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6.$$

**Viel Erfolg!**