Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2019/20
01.02.2020

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+n\ln n} - n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n\ln n - n^3}{\sqrt{n^3+n\ln n}+n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{2n^{\frac{3}{2}}} = 0\,.$$

ii) Der Ausdruck

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ ist in einer Umgebung von 1 ungleich Null. Es gilt

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(\ln(x))^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x}\,.$$

Da die Ableitung von $x \mapsto 1-x$ in einer Umgebung von 1 nicht verschwindet, folgt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(\ln(x))^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-1} = 0\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x} = 1\cdot 0 = 0$$

und die Regel von de l'Hospital liefert für den zu untersuchenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}} = 0\,.$$

iii) Wegen $\lim_{x\to 0}\sin(\cos x) = \sin(\cos 0) \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(\cos x)} = \frac{0}{\sin(\cos 0)} = 0\,.$$

b) Ist für $n \in \mathbb{N}$

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)^n$$

gesetzt, so gilt

$$\sqrt[n]{\frac{b_n}{n^3}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \to \frac{1}{1^3}\cdot e^2 = e^2 \qquad \text{für } n\to\infty\,.$$

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ beträgt also $R = e^{-2}$. Deshalb ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < e^{-2}$ konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > e^{-2}$ divergent. Zu untersuchen verbleibt der Fall $|x| = e^{-2}$, also $x = e^{-2}$ oder $x = -e^{-2}$:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \leqslant e^2$

$$0 < b_n \leqslant e^{2n}$$

und damit

$$0 < \left|b_n x^n\right| = b_n |x|^n \leqslant e^{2n} \, (e^{-2})^n = 1\,.$$

Demzufolge erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{b_n}{n^3} \, x^n\right| = \frac{1}{n^3} \left|b_n x^n\right| \leqslant \frac{1}{n^3}\,.$$

Aufgrund der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ für $|x| = e^{-2}$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} x^n$ konvergiert genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leqslant e^{-2}$.

Aufgabe 2

a) **i)** Die durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{1+x^2} > 0\,.$$

Also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen $f(x) > -\frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ sowie der Stetigkeit von f folgt aus dem Zwischenwertsatz: $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \infty)$. Damit besitzt die bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$.

ii) Wegen $f(0) = 1$ ist $f^{-1}(1) = 0$. Da $f'(0) = 4 \neq 0$ ist f^{-1} nach dem Satz über die Umkehrfunktion in $f(0) = 1$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}\,.$$

b) Um zu zeigen, dass

$$\left|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)\right| \leqslant \sqrt{3}\,|x-y|$$

für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt, betrachten wir die Funktion $f\colon [-\pi/3, \pi/3] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(\cos t)$. Diese ist auf $[-\pi/3, \pi/3]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$. Da $\tan$ auf $[-\pi/3, \pi/3]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$\left|f'(t)\right| \leqslant \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\pi/3, \pi/3]\,.$$

Sind $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x-y)\,.$$

Es folgt

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(\xi)\right| |x-y| \leqslant \sqrt{3}\,|x-y|\,.$$

Aufgabe 3

a) **i)** Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \left(xe^{-x^2}\right) dx = \left[x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right) dx$$
$$= -\tfrac{2}{2}e^{-2} + \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx = -e^{-2} + \left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= -e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2}\,.$$

ii) Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx = \left[e^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}e^x \cdot \sin 2x\,dx$$
$$= 0 + \left[e^x \cdot \left(\tfrac{1}{4}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}(e^{\pi} - 1) - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx.$$

Daraus folgt

$$\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)\,.$$

b) Um

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln\bigl(1 + 1/k\bigr) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu zeigen, verwenden wir vollständige Induktion.

IA: $n = 1$. Es ist $\ln(1+1) = \sum_{k=1}^{1} \ln(1+1/k)$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ln(1+1/k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k) + \ln\bigl(1 + 1/(n+1)\bigr) \overset{\text{(IV)}}{=} \ln(n+1) + \ln\bigl(1 + 1/(n+1)\bigr)$$
$$= \ln\bigl((n+1)\cdot(1 + 1/(n+1))\bigr) = \ln\bigl((n+1)+1\bigr)\,.$$

c) Zu zeigen ist, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $[0,2]$ liegt.

Zunächst beachten wir $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0+$. Daraus ergibt sich $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \to 1$ für $x \to 0+$, weshalb das Integral bei 0 nicht uneigentlich ist. Für alle $x \in (0,1]$ gilt wegen $|\sin(x)| \leqslant x$

$$0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant 1\,,$$

woraus

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx = 1$$

folgt. Da $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ für alle $x \geqslant 1$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \Bigl[-\frac{1}{x}\Bigr]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

konvergent ist, konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium und es gilt

$$0 \leqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,.$$

Zusammen erhalten wir, dass $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert und dass für den Wert gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx}_{\in[0,1]} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\in[0,1]} \in [0,2]\,.$$

Aufgabe 4

a) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 8 & -6 & 2 & 4 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2\to\frac{1}{8}Z_2]{Z_3\to Z_3+\frac{1}{3}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1\leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow[Z_1\to Z_1+\frac{3}{4}Z_2]{Z_2\to\frac{1}{3}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mittels des -1 Ergänzungstricks bekommen wir,dass

$$Kern(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

und die Lösung ist

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Um den Real- und Imaginärteil von $z := \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^6$ zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Polarkoordinaten von $y := \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|y| = \sqrt{2+2} = 2\,.$$

Für das Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ von y gilt $\varphi = \frac{\pi}{4}$ Also gilt $y = 2e^{i\pi/4}$ und es folgt

$$z = y^6 = 64e^{i3\pi/2} = -64i\,.$$

Damit lauten $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -64$.