

2. Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ gegeben. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ x^\alpha, & 0 < x < 1, \\ \beta^{x-1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

- a) Wo ist die Funktion f stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Welche Bedingungen müssen α und β erfüllen, damit f überall differenzierbar ist?
- c) Nun sei $\alpha = \beta = 2$. Begründen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\alpha > 0$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := nx^\alpha \exp\left(\frac{1}{n} - nx\right).$$

- a) Berechnen Sie für jedes $x \in (0, 1]$ den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- b) Berechnen Sie $\max\{f_n(x) : 0 < x \leq 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und bestimmen Sie jeweils eine Stelle, an der dieses Maximum angenommen wird.
- c) Geben Sie an, für welche α die Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $(0, 1]$ ist, und begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Beweisen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ gilt: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ gleichmäßig.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten

$$f(x) = \frac{2x - 7}{2x^2 + x - 3}.$$

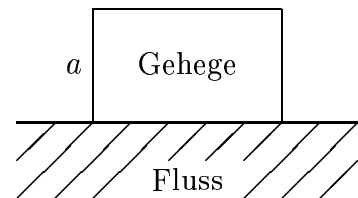
- a) Berechnen Sie die Nullstellen x_1 und x_2 des Nenners, und bestimmen Sie dann Zahlen a und b , für die gilt:

$$f(x) = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}$$

- b) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.
c) Berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.
d) Geben Sie $f^{(2000)}(-1)$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Am Ufer eines Flusses soll ein rechteckiges Gehege abgezäunt werden (siehe Skizze), wobei zum Fluss hin kein Zaun errichtet werden muss. Insgesamt steht Material für einen Zaun der Länge L zur Verfügung, jede Gehegeseite soll mindestens die Länge $\frac{1}{10}L$ haben.



- a) Wie lang muss man die Gehegeseite a wählen, damit das abgezäunte Gebiet eine möglichst große Fläche hat?
b) Für welches a ist die Länge der Diagonale des Geheges am größten?
c) Für welches a ist die Länge der Diagonale des Geheges am kleinsten?
d) Nun bezeichne g die Funktion, die jedem a die zugehörige Diagonalenlänge $g(a)$ zuordnet. Entwickeln Sie g um den Punkt $a_0 = \frac{2}{5}L$ in eine Potenzreihe.

Nach der Klausur

Die korrigierten Übungsklausuren können ab 15.2. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 17.2. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.