Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2010/11
29.01.2011

Übungsklausur

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Geodäsie**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{\, z^2 \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\, \tfrac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi \,\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \left|\sin\left(\tfrac{6x+\pi}{12} + \left|\tfrac{6x-\pi}{12}\right|\right)\right| .$$

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sei definiert durch

$$a_0 := 1 + i, \qquad a_n := (a_{n-1})^2 \cdot (1 - i) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$a_n = 2^{2^n-1}(1 + i) .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$;

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 + 2 - \sqrt{n^6 + 5n^3}$.

b) Es sei $0 < a < 1$ eine feste Zahl. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \sqrt[k]{a}\right)$$

auf Konvergenz.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n}(x - 1)^n$$

konvergent? Bestimmen Sie für diese x die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ und $b \in [0, \infty)$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} ae^x & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+b} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$?

b) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe.

ii) Welche Funktion wird durch diese Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < R$ dargestellt?

Hinweis: Mittels $(x-1)^n = (x-1)^k(x-1)^{n-k}$ lässt sich die Reihe als ein Cauchyprodukt auffassen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2\left(\sin(\frac{1}{x}) + \frac{3}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie, in welchen Stellen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie dort die Ableitung f'.

b) Zeigen Sie, dass $f'(x) = f'(-x)$ für alle x, für die der Ausdruck definiert ist, gilt.

c) Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Ableitung f' stetig ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existieren.

e) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

f) Zeigen Sie, dass die Ableitung f' keine Nullstellen besitzt.
Hinweis: Es ist evtl. hilfreich, die Fälle $|x| < 1$ und $|x| \geq 1$ getrennt zu untersuchen.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 08.02.2011, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 12.02.2011, von 13.15 Uhr bis 13.30 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.