KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1

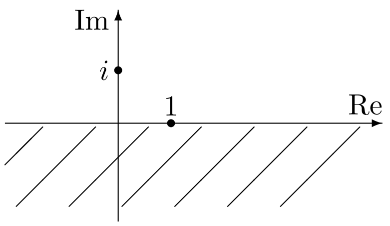
a) Es gilt

$$\{\, z^2 |\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \tfrac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi \,\} =$$

$$\{\, z |\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \pi < \arg(z) < 2\pi \,\} =$$

$$\{\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} |\ \mathrm{Im}(z) < 0 \,\}.$$

Die gesuchte Menge ist also die untere Halbebene und läßt sich damit wie folgt skizzieren.



b) Es gilt $\frac{6x-\pi}{12} \geq 0 \iff x \geq \frac{\pi}{6}$. Damit folgt:

Falls $x \in [0, \frac{\pi}{6})$ gilt $f(x) = \left|\sin\left(\frac{6x+\pi}{12} + \underbrace{\left|\frac{6x-\pi}{12}\right|}_{=-\frac{6x-\pi}{12}}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

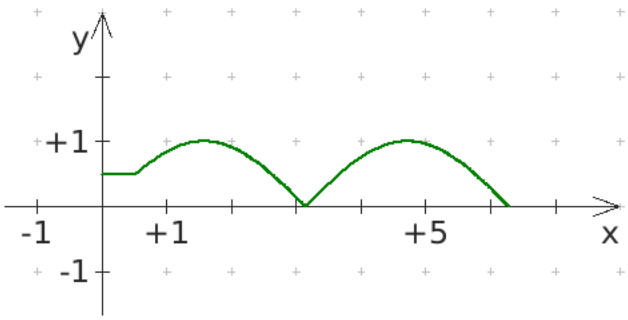
Falls $x \in [\frac{\pi}{6}, 2\pi]$ gilt $f(x) = \left|\sin\left(\frac{6x+\pi}{12} + \underbrace{\left|\frac{6x-\pi}{12}\right|}_{=\frac{6x-\pi}{12}}\right)\right| = |\sin x|$.

Es ist $\sin x \geq 0$ falls $x \in [\frac{\pi}{6}, \pi]$ und $\sin x \leq 0$ falls $x \in (\pi, 2\pi]$.

Damit gilt also für alle $x \in [0, 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \sin x & \text{falls } x \in [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ -\sin x & \text{falls } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

und wir erhalten folgende Skizze des Funktionsgraphen.



c) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion:

I.A. ($n = 0$): Es gilt $a_0 = 1 + i = 2^{2^0-1}(1 + i)$.

I.S.: Für ein festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gelte $a_n = 2^{2^n-1}(1 + i)$ (I.V.). Dann folgt

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot (1 - i) \overset{\text{I.V.}}{=} 2^{2^n-1} \cdot 2^{2^n-1} \cdot (1 + i) \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 - i)}_{=2} =$$

$$2^{2^n-1+2^n-1+1}(1 + i) = 2^{2\cdot 2^n-1}(1 + i) = 2^{2^{n+1}-1}(1 + i);$$

die Induktionsbehauptung trifft dann also auch für $n + 1$ zu.

Damit ist $a_n = 2^{2^n-1}(1 + i)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bewiesen.

Aufgabe 2

A2a)

i) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

denn: $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}e = 1 \quad (n\to\infty)$

mit 6. Ü, A2a), Def von e, Satz über Rechnen mit Grenzwerten

oder so: $1-\frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1$ und $\frac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$.

$\uparrow$ Bernoulli Ungleichung

ii) $n^3+2-\sqrt{n^6+5n^3} = \frac{(n^3+2)^2-(n^6+5n^3)}{n^3+2+\sqrt{n^6+5n^3}}$

$= \frac{-1+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}+\sqrt{1+\frac{5}{n^3}}} \longrightarrow -\frac{1}{2} \ (n\to\infty)$

A2b) Anwendung des Leibnizkriteriums:

$0<a<1 \Rightarrow 1-\sqrt[k]{a}>0$ und wegen $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a}=1$

$\lim_{k\to\infty}(1-\sqrt[k]{a})=0$ und wegen

$0<a<1 \Rightarrow a^{k+1}<a^k \Rightarrow \sqrt[k]{a}<\sqrt[k+1]{a} \ (k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow (1-\sqrt[k]{a})_k \searrow$

Damit sind die Vor. des Leibnizkriteriums erfüllt: Die Reihe ist konvergent.

A2c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(-2)^n}(x-1)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$ (geometrische Reihe)

Konvergent genau für $x\in\mathbb{R}$ mit $|1-x|<2$

$\Leftrightarrow x$ mit $-1<x<3$

Für $-1<x<3$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(-2)^n}(x-1)^n = \frac{6}{1+x}$

Aufgabe 3

a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen (unabhängig von a, b) stetig.

Im Punkt 0 ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x)$$

gilt.

Aus der Definition erhalten wir

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} ae^x = ae^0 = a,$$

$f(0) = 1$ und

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + b} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x} + b} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{b}{\sqrt{1 + xb} + \sqrt{1}} = \frac{b}{1+1} = \frac{b}{2}.$$

f ist im Punkt 0 also genau dann stetig, wenn $a = 1 = \frac{b}{2}$ (also genau dann, wenn $a = 1$ und $b = 2$ ist) gilt.

Fazit: f ist auf $\mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn $a = 1$ und $b = 2$ gilt.

b) **i)** Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnen wir den entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihe mit $a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$.

Es gilt $1 = \frac{1}{0!} \leq \underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}}_{=a_n} \leq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1)-\text{mal}} = n + 1 \leq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit erhalten wir $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wegen $\sqrt[n]{1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1$ folgt mit dem Sandwich-Theorem $\sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Aus dem Wurzelkriterium folgt daher, daß der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$ ist.

ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| < R$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-1)^k (x-1)^{n-k} =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n\right) =$$

$$\exp(x-1) \cdot \frac{1}{1 - (x-1)} = \frac{e^{x-1}}{2 - x},$$

wobei wir benutzt haben, dass die Exponential- und geometrische Reihe die Konvergenzradien ∞ bzw. 1 haben und damit beide Faktoren des Cauchy-Produkts wegen $|x - 1| < R$ absolut konvergente Reihen sind.

Aufgabe 4

a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach der Produkt- und der Kettenregel

$$f'(x) = 2x\big(\sin(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{3}{x}\big) + x^2\big(\cos(\tfrac{1}{x}) \cdot \tfrac{-1}{x^2} + \tfrac{-3}{x^2}\big) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) + 6 - \cos(\tfrac{1}{x}) - 3 =$$
$$3 + 2x\sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x}).$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\big(\sin(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{3}{x}\big) = \lim_{x\to 0} x\sin(\tfrac{1}{x}) + 3 = 0 + 3 = 3,$$

weil $|x\sin(\frac{1}{x})| \leqslant |x|$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 3$.

Fazit: f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

b) Wie in a) gesehen, ist der Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und es gilt

$$f'(-x) = \left.\begin{cases} 3 + 2(-x)\sin(\frac{1}{-x}) - \cos(\frac{1}{-x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases}\right\} =$$
$$\left.\begin{cases} 3 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 3 & \text{falls } x = 0 \end{cases}\right\} = f(x).$$

c) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f' als Komposition stetiger Funktionen stetig.

In 0 ist f' nicht stetig, denn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht: Wegen $|x\sin(\frac{1}{x})| \leqslant |x|$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} 3 + 2x\sin(\frac{1}{x}) = 3$. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert also genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ existiert. Der letztgenannte Grenzwert exisitiert nicht, was man mittels der Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$ und der Digergenz von $(\cos\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ einsieht.

Fazit: f' ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in 0 jedoch nicht.

d) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2\big(\sin(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{3}{x}\big) = \lim_{x\to\infty} x^2\sin(\tfrac{1}{x}) + 3x = \infty,$$

denn $\sin(\frac{1}{x}) > 0$ für alle $x > \frac{1}{\pi}$.

Weiter gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2\sin(\tfrac{1}{x}) + 3x = -\infty,$$

denn $\sin(\frac{1}{x}) < 0$ für alle $x < -\frac{1}{\pi}$.

e) Da f nach a) auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R}$ erst recht stetig. Aus dem Zwischenwertsatz in Kombination mit d) erhalten wir somit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Also ist f surjektiv.

f) Nach a) gilt $f'(0) = 3 \neq 0$. Wegen b) genügt es daher zu zeigen, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x > 0$ ist. Sei also $x > 0$.

Falls $x < 1$ gilt $|2x\sin(\frac{1}{x})| < 2$. Damit erhalten wir in diesem Fall $f'(x) = 3 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \geq 3 - |2x\sin(\frac{1}{x})| - |\cos(\frac{1}{x})| > 3 - 2 - 1 = 0$.

Falls $x \geq 1$ gilt $\frac{1}{x} \leq 1$ und damit $\sin(\frac{1}{x}) > 0$. Damit erhalten wir in diesem Fall $f'(x) = 3 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \geq 3 - |\cos(\frac{1}{x})| > 3 - 1 > 0$.

Also gilt in jedem Fall $f'(x) > 0$, also insbesondere $f'(x) \neq 0$.