Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

WS 2011/12
28.01.2012

Übungsklausur
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 $(3 + 2 + 5 = 10$ Punkte)

a) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen sei gegeben durch

$$z_n := \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie alle Häufungswerte von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

b) Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{2\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{e^z - e^2}{z-2}$$

um die Entwicklungsstelle $z_0 = 2$.

c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die

$$4\cosh(x)\sinh(x) < e^2$$

gilt.

Aufgabe 2 $(5 + 4 + 1 = 10$ Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0\,, \qquad a_1 := \frac{8}{3}\,, \qquad a_{n+1} := \frac{10}{3}\,a_n - a_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_n = 3^n - \frac{1}{3^n}\,.$$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,,$ **ii)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,.$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\,(z - 5i + \pi)^n\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(5 + 5 = 10 Punkte)**

a) Prüfen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$$

existiert, und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(1+\ln x)x = 1$$

genau eine Lösung $x \in (0,\infty)$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion, die streng monoton ist, und verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 4 **(3 + 3 + 4 = 10 Punkte)**

a) Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1-\frac{k}{e})e^{-k}}{k(k+1)}$$

konvergent ist, und bestimmen Sie den Reihenwert.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4x)^k}{(1+2|x|)^{k-1}}$$

konvergiert, und berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\quad x\mapsto \begin{cases} \sin(x)\,\cos(1/x) & \text{für } x\neq 0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$

stetig in 0 ist. Ist f differenzierbar in 0? Begründen Sie Ihre Antwort.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **07.02.2012**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianz-Gebäude) abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **09.02.2012**, von 13.30 Uhr bis 13.45 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianz-Gebäude) möglich.